

	Épreuve de MATHÉMATIQUES Trim 1-Contrôle continu 1-Durée : 2H-Coef : 4 Date : 27/09/22 Année scolaire : 2022/2023	Classe : T^{le}D
	Compétence : Etudier la convergence d'une suite numérique, Placer les points dans un plan complexe	
Appréciations de la production : -Expert (A+)[18-20]-Acquis (A)[15-17]-En cours d'acquisition (EA)[11-14]-Non acquis (NA)[0-10]		Notée sur 20

La qualité de la rédaction et le soin apporté aux tracés des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.

EVALUATION DES RESSOURCCES

EXERCICE I

3 points

Démontrer par récurrence les propositions suivantes pour $n \in \mathbb{N}^*$

1. $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17. 1 pt
2. $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. 1 pt
3. $1(1!) + 2(2!) + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$. 1 pt

EXERCICE II

5 points

Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 12} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 4$. 1 pt
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4}|U_n - 4|$. 1 pt
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - 4| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. 1 pt
4. Démontrer que la suite (U_n) est convergente et trouver sa limite. 2 pts

EXERCICE III

6 points

1. Calculer le nombre complexe i^{1985} . 0,75 pt
2. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système suivant : $\begin{cases} (1+i)z - iz' = 2+i \\ (2+i)z + (2-i)z' = 7-4i \end{cases}$ 1,5 pt
3. On pose $Z = \frac{iz-3}{z+i}$ avec $z = x+iy \in \mathbb{C}$
Déterminer l'ensemble M d'affixe z dans chaque cas :
 - a. Z soit un réel. 1,25 pt
 - b. Z soit un imaginaire pure . 1,25 pt
 - c. $|Z| = 1$. 1,25 pt

EXERCICE IV

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on désigne par : A ; B ; C et D les points d'affixes respectives $Z_A = \frac{3}{2}i$; $Z_B = 2 + \frac{1}{2}i$; $Z_C = 1 - \frac{3}{2}i$ et $Z_D = -1 - \frac{1}{2}i$

1. Placer dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points images A ; B ; C et D de ces nombres complexes. 1 pt
2. Déterminer l'affixe du point I milieu de [AC]. 1 pt
3. Déterminer l'affixe du point G barycentre des points (A;-2) ; (B;3) et (C;1) . 1 pt
4. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on conclure ? 1 pt
5. Déterminer l'affixe du point E symétrique de A par rapport à B . 1 pt

Présentation : 1 point

Classe : $T^{le}D$	Evaluation N°2	Épreuve de Mathématiques	Durée : 04h	Année Scolaire : 2022/2023
--------------------	----------------	--------------------------	-------------	----------------------------

Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES

[15,5pts]

Exercice 1. (05,5 points)

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :

$$1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + n \times 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1. \quad [0,75pt]$$

2. Montrer que $A = \frac{4 \times \sqrt[3]{4} \times 2 \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}$ est un entier naturel. [0,5pt]

3. Soit la suite numérique (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- (a) Montrer par recurrence que pour tout entier naturel n , $U_n \geq -\frac{1}{2}$. [0,75pt]

- (b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. [0,75pt]

- (c) Dédurre que la suite (U_n) converge et déterminer sa limite. [0,75pt]

4. Un étude statistique faite l'évolution du salaire horaire des ouvriers d'une entreprise en fonction du nombre d'années a permit d'obtenir : la droite de regression de Y (salaire horaire moyen en fcfa) en X (rang de l'année) d'équation $153,92x - y + 1464,32 = 0$ et celle de X en Y d'équation $x - 0,0064y + 9,312 = 0$.

- 1.a) Sachant que $cov(X; Y) > 0$, calculer à 10^{-2} près le coefficient de corrélation linéaire de cette série.

- b) Que peut-on en déduire ? [0,25pt]

- 2.) Déterminer les coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ du point moyen associé au nuage de points de cette série. [0,75pt]

3. Sachant que le rang 1 est l'année 2007, donner une estimation à l'unité près du salaire horaire moyen d'un ouvrier de cette entreprise en 2023. [0,5pt]

Exercice 2. (04,25 points)

- I) 1. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées du complexe $\omega = -8i$. [0,5pt]

2. Soit P le polynôme de la variable complexe z défini par $P(z) = z^3 - 5(1+i)z^2 + 18iz + 10(1-i)$

- i. Calculer $P(1+i)$ puis conclure. [0,5pt]

- ii. Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z-1-i)(z^2 + az + b)$. [0,5pt]

- iii. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. [0,75pt]

- II) Soit la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = x + \sqrt{x}$.

1. Étudier la branches infinie à la courbe de la fonction h . [0,75pt]

2. Justifier que h est dérivable sur $[1; 4]$ et montrer que pour tout $x \in [1; 4]$, $\frac{5}{4} \leq h'(x) \leq \frac{3}{2}$. [0,75pt]

3. Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout $x \in [1; 4]$, $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4} \leq h(x) \leq \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

Exercice 3. (05,25 points)

- I) 1. Énoncer clairement **le théorème des valeurs intermédiaires**. [0,5pt]
2. Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$.
- a) Déterminer l'image par g des intervalles $] - \infty; 1]$ et $]1; +\infty[$. [0,5pt]
- b) Donner en justifiant le nombre de solution de l'équation $g(x) = \frac{3}{2}$ sur $\mathbb{R}$. [0,5pt]
- c) Montrer que g réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser et dresser le tableau de variation de la bijection réciproque g^{-1} sur J . [0,75pt]
- d) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\alpha \in]1; 2[$. [0,5pt]
- e) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$. [0,25pt]

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$		1	2		$-\infty$

- II) Soit la fonction f définie sur $] - 1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.
1. Calculer les limites de f à droite en -1 et en $+\infty$. [0,5pt]
2. Montrer que pour tout $x \in] - 1; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{-g(x)}{(1+x^3)^2}$. [0,5pt]
3. Dresser le tableau de variation de f sur $] - 1; +\infty[$. [0,5pt]
4. Construire dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique sur les axes : 2cm, la courbe représentative de f sur $] - 1; +\infty[$ (prendre $\alpha = 1,7$ et $f(\alpha) = 0,15$) [0,75pt]

Partie B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES

[04,5pts]

Situation : Monsieur NJOYA est un grand agriculteur et boulanger dans la ville de Bagangté. Pour étendre son agriculture, il désire acheter un terrain dans une zone où le mètre carré coûte 5000 fcfa. Le propriétaire du terrain ne disposant pas de la forme exacte de son terrain, il fait appel à un géomètre qui lui fournit les relevés topographiques suivant : le terrain est délimité dans le plan par l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\frac{z-4-6i}{z-2i}$ soit un imaginaire pur avec $z = x + iy$ et $z \neq 2i$. L'unité graphique dans le plan est le décimètre

Monsieur NJOYA dispose aussi d'une usine de production de pain, la quantité journalière de pains produit par cette usine est modélisée **en centaine** de pains par la fonction f définie par $-2x^3 + 12x^2 + 8$ où x représente le temps de production compris entre 0 heure et 7 heures.

Ancien étudiant de l'université des montagnes, Monsieur NJOYA est un sponsor du club scientifique dans cette université. Il décide d'octroyer une aide financière de 1000000 fcfa à ce club si le nombre d'adhérents dépasse 600 étudiants au cours d'une année. le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre d'adhérents de ce club jusqu'en

2022.

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'adhérents y_i	95	196	240	280	309	320

Tâches.

1. Déterminer la production maximal du pain par jour dans l'usine de Monsieur NJOYA [1,5pt]
2. Déterminer le montant à prévoir par Monsieur NJOYA pour l'achat du terrain. [1,5pt]
3. À partir de quelle année ce club pourra-t-il bénéficier de l'aide octroyée par Monsieur NJOYA. [1,5pt]

Présentation :

[0,5pt]