Niveau : **Terminale C** — **Année Scolaire :** 2022– 2023

EVALUATION : N°2 — **Coef :** 04 **Durée :** 04H00

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIEA : EVALUATION DES RESSOURCES 15,50 points

EXERCICE 1 *7,00 points*

I. Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x)$

1. Demontrer que f realise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$vers un intervalle $\mathbb{R}$. ***0,5pt***
2. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée. ***0,75pt***
3. Démontrer que pour tout nombre réel t de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, on a $t \leq \tan(t) \leq 2t$ ***0,75pt***

II. soit P le plan muni d'un repère orthonormal $R(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité 2cm) soient f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ par : $f_1(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ et $f_1(x) = x - \sqrt{x^2-1}$. On désigne par C_1 et C_2 les representations graphiques respectives de f_1 et f_2

1. a) Etudier la dérivabilité de f_1 à gauche en -1 et à droite en 1 interpreter graphiquement les resultats obtenus. ***0,75pt***
   b) Etudier les variations de f_1 et dresser dresser son tableau des variations ***1pt***
   c) Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptotes à C_1 en $+\infty$ et preciser l'autre asymptote ***0,75pt***
   d) Tracer C_1 ainsi que ses asymptotes dans le meme repère. ***0,75pt***
2. Soit C la courbe d'équation $y^2 - 2xy + 1 = 0$ *et* s la symétrie de centre O.
   a) Montrer que $s(C_1) = C_2$ et tracer C_2 dans le même repère ***0,5pt***
   b) Montrer que C est la réunion de C_1 et C_2 ***0,5pt***
3. Soit $\vec{u}$ le vecteur$\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.
   a) Montrer que $(O;\vec{\imath};\vec{u})$ est un repère du plan ***0,25pt***
   b) Déterminer une équation de C dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{u})$ ***0,5pt***

EXERCICE 2: *3,75 points*

I. Soit W un espace vectoriel dont une base est $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. f est une application linéaire de W dans $\mathbb{R}$. On donne $f(\vec{\imath}) = -3$; $f(\vec{\jmath}) = 2$ et $f(\vec{k}) = -1$. Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ un vecteur de W.

1. Montrer que $f(\vec{u}) = -3x + 2y - z$ ***0,5pt***
2. Démontrer que $kerf$ est un plan vectoriel et déterminer une base de $kerf$. ***0,5pt***
3. Démontrer que $Imf = \mathbb{R}$ ***0,25pt***

II. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère les points les points $A(0;4;1)$, $B(1;3;0)$, $C(2;-1;-2)$ et $D(7;-1;4)$

1. Démontrer que les points A, B et C sont non alignés. ***0,5pt***
2. Soit (Δ) la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$
   a) Démontrer que la droite (Δ)est orthogonale au plan (ABC). ***0,5pt***
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). ***0,5pt***
   c) Déterminer une équation paramétrique de la droite (Δ). ***0,5pt***
3. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) ***0,5pt***

EXERCICE 3: *4,75 points*

I-On appelle diviseur strict d'un entier naturel n tout diviseur de n positif et autre que lui-même.

On appelle nombres amiables, deux nombres entiers naturels tels que chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.

On appelle nombre parfait, tout nombre entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts

1. Déterminer les diviseurs stricts de 220 et 284 puis justifier qu'ils sont amiables. ***1pt***
2. a) Justifier que le nombre 28 est-il parfait ***0,25pt***

   b) Déterminer un nombre premier p tel que $A = 2^4p$ soit un nombre parfait. ***0,5pt***

   c) n est un nombre entier naturel non nul et p un nombre premier. Exprimer p en fonction de n pour que $B = 2^np$ soit parfait. ***0,5pt***

II- P est le polynôme à coefficients entiers relatifs défini par $P(x) = 6x^3 + 9x^2 + 5x + 1$.

1. Soit $p\ et\ q$ deux entiers relatifs premiers entre eux, n un entier naturel non nul. Démontrer que $p\ et\ q^n$ sont premiers entre eux. ***0,5pt***
2. Soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible solution de l'équation $P(x) = 0$. Démontrer que $a \in \{-1,1\}$ et que b divise 6. En déduire les valeurs possibles de $\frac{a}{b}$. ***1pt***
3. En déduire une racine de P et factoriser le polynôme P. ***0,5pt***
4. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $P(x) \equiv 0[5]$. ***0,5pt***

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,50 POINTS

Quatre malfrats braquent un homme d'affaires et emporte une somme inférieure à 14 mille euros. Ils décident alors de se rendre dans un restaurant réputé pour sa bonne cuisine pour fêter leur succès et se partager le butin (le partage étant équitable). S'ils se partagent le triple du butin, il restera 3 mille euros. Malheureusement un des bandits meurt des suites de blessures reçus lors des échanges de tirs avec la police. Si le reste du groupe se partagent le double du butin, il restera mille euros. Le patron du restaurant en passant a écouté et a donc une idée du code de la mallette contenant le butin. Le code a 6 chiffres. Il est le plus petit nombre N divisible par 3 et 11. Son écriture en base 10 est : $\overline{28x75y}$

Quelques jours plus tard les trois malfrats restant ont été arrêtés et jetés en prison. Les gars ne comptent pas abandonner leur butin et commencent donc à réfléchir sur un plan d'évasion. Ils ont observé pendant un an, 3 lampes qui brillent et éclairent toute la cour de la prison chaque nuit après 18h00, heure avant laquelle elles sont toutes les trois éteintes : la première lampe s'éteint toutes les heures, la deuxième toutes les 36 minutes et la troisième toutes les 90 minutes. Ils se sont donc enfuit lorsque les trois lampes étaient simultanément éteintes après 22 heures et avant 02 heures du matin.

Tâches :

1- Déterminer ce que gagnera le patron du restaurant si les trois autres malfrats sont condamnés à perpétuité ? ***1,5pt***

2- Déterminer l'heure à laquelle les trois malfrats se sont évadés de la prison. ***1,5pt***

3- Déterminer le code de la mallette ***1,5pt***