**Samedi 29 Octobre 2022**
**Niveau : Terminale C**

# FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES

## (ESPACES VECTORIELS, APPLICATIONS LINEAIRES ET MATRICES)

### EXERCICE 1 :

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base d'un espace vectoriel $E$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$.

1. Pour tout réel $\lambda$, on considère l'ensemble $E_\lambda$ des vecteurs $\vec{u}$ de $E$ tels que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.
   **a)** Démontrer que $E_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
   **b)** On suppose que $f$ vérifie l'égalité $f \circ f = 2f$. Démontrer que $\vec{u} \in Imf \iff \vec{u} \in E_2$.
2. On suppose ici qu'on a : $f(\vec{\imath}+\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ , $f(\vec{\imath}-\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}) = \vec{0}$ .
   **a)** Démontrer que $f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath}$ , $f(\vec{\jmath}) = 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$.
   **b)** Donner la matrice $M$ de $f$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
   **c)** Démontrer que $f \circ f = 2f$.
   **d)** Déterminer par une de ses bases, le noyau $Kerf$ de $f$.
   **e)** Déterminer l'image $Imf$ de $f$. On précisera une de ses bases.

### EXERCICE 2 :

$E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$, associe le vecteur $f(\vec{u}) = (-x-y+2z)\vec{\imath}+(2x-y+z)\vec{\jmath}+(x-2y+3z)\vec{k}$.

1. Déterminer la matrice $M$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. **a)** Déterminer le noyau $Kerf$ de $f$. (On donnera une base)
   **b)** En déduire la dimension de $Imf$, image de $f$.
   **c)** $f$ est-elle bijective ? Justifier votre réponse.
3. Soient $\vec{e_1} = 2\vec{\jmath}-\vec{k}$, $\vec{e_2} = 3\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ et $\vec{e_3} = \vec{\imath}-\vec{k}$.
   **a)** Démontrer que $\mathcal{B}' = (\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ est une base de $E$.
   **b)** Ecrire la matrice $M'$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.

### EXERCICE 3 :

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension 3.

$\mathcal{B} = (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est une base de $E$, $\vec{n} = \vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$ est un vecteur de $E$. Soit $f$ l'application de $E$ dans $E$ définie par : $f(\vec{u}) = \vec{n}\wedge\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur quelconque de $E$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme bijectif. Déduire $Kerf$ et $Imf$.
2. Donner la matrice $A$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Donner l'expression analytique de $f$.

4. Soit $k$ un nombre réel. Déterminer suivant les valeurs de $k$, l'ensemble $E_k = \{\vec{u} \in E / \ f(\vec{u}) = k\vec{u}\}$.

## EXERCICE 4 :

L'espace vectoriel $\varepsilon$ est rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère le vecteur $\vec{w} = \frac{1}{3}(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k})$, et l'application $\varphi$ définie de $\varepsilon$ dans $\varepsilon$ qui, à tout vecteur $\vec{v}$ de $\varepsilon$, associe le vecteur $\varphi(\vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{v}$.

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\varepsilon$.
2. On pose $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.
   **a)** Donner les coordonnées de $\varphi(\vec{v})$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
   **b)** Déterminer le noyau et l'image de $\varphi$.
3. Soient $\vec{u} = \frac{1}{3}(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k})$ et $\vec{v} = \frac{1}{3}(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k})$.
   **a)** Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base orthonormée de $Im\varphi$, puis que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base orthonormée de $\varepsilon$.
   **b)** Ecrire la matrice de $\varphi$ dans cette nouvelle base.

## EXERCICE 5 :

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $3$ rapporté à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{n}$ de $E$ tels que $\vec{a} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{n} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.
Soit $f$ l'application de $E$ dans $E$ définie par : $f(\vec{u}) = (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}$.

1. Démontrer que $f$ est un endomorphisme de $E$, puis donner sa matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Démontrer que $Kerf$ est une droite vectorielle dont on précisera une base.
3. Démontrer que $Imf$ est un plan vectoriel de vecteur normal $\vec{n}$.

## EXERCICE 6 :

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.
On donne $F = \{(x + y\,; x\,;\ x - y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(2x - 2y\,; 3x\,;\ x + 2y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ et préciser leurs dimensions.
2. Donner une équation cartésienne de $E$ et une équation cartésienne de $F$.
3. Déterminer $F \cap G$ et $\dim(F \cap G)$. Déterminer $F + G$ et $\dim(F + G)$.
4. Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ défini par : $f(\vec{\imath}) = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ et $f(\vec{k}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$.
   **a)** Déterminer le noyau de $f$ et préciser une base $\vec{e_1}$.
   **b)** Démontrer que $Imf$ est un plan vectoriel dont on précisera une base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.
   **c)** Montrer que tout vecteur de $E$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $Kerf$ et d'un vecteur de $Imf$.