

EXPERT CORPORATION	Epreuve de MATHEMATIQUES	CLASSE: TieC	
1 ^{ere} évaluation de la 3 ^{eme} séquence DECEMBRE 2020		Durée : 4h	Coef : 7

Proposée par : Mr SYMPHORIEN STYVE KAMGA

NB : le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15points).

EXERCICE 1 :(05,25pts)

I) Soit a un entier naturel qui s'écrit $a = r^\alpha s^\beta$ avec r et s deux nombres premiers distincts, et α, β deux entiers naturels. Le but de cette exercice est de montrer que $a^n = p^2$ ou n est le nombre de diviseurs de a et p le produit de tous les diviseurs de a .

1) On pose $a = 200$.

- a) Quel est le nombre de diviseurs n de a . [0.5pt]
- b) Déterminer p , produit de tous les diviseurs de a . [0.5pt]
- c) Vérifier qu'on a bien $a^n = p^2$ [0.5pt]

2) On suppose à présent que $a = r^\alpha s^\beta$ (r et s premiers distincts) α, β deux entiers naturels .

- a) Déterminer n le nombre de diviseurs de a . [0.5pt]
- b) Démontrer que le produit p de tous les diviseurs de a est $p = r^{\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} s^{\frac{\beta(\beta+1)(\alpha+1)}{2}}$ [0,75pt]
- c) Dédire alors que $a^n = p^2$ [0,75pt]

II) 1- Résoudre dans \mathbb{Z}^2 le système $\begin{cases} (3x + 5y)(x + 2y) = 1276 \\ xy = 2ppcm(x, y) \end{cases}$ [0,75pt]

2- On note A l'ensemble des 193 entiers naturels inférieure où égale à 192 et on considère les deux fonctions f et g définie de la manière suivante :

à tout entier a de A , f associe le reste de la division euclidienne de a^{83} par 193 .

à tout entier g de A , g associe le reste de la division euclidienne de a^{155} par 193 .

Démontrer que $g(f(a)) = a^{83 \times 155} [193]$. En déduire que pour tout $a \in A$ on a : $g(f(a)) = a$. [1pt]

EXERCICE 2 :(03,5pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(-2 ; -1 ; 2)$; $B(6 ; -5 ; 3)$; $C(-1 ; 3 ; 10)$ et le vecteur $\vec{u}(-4, -7, 4)$

1) a) Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ puis interpréter géométriquement ces résultats [0.75pt]

b) Calculer les distances AB et AC . En déduire la nature exacte du triangle ABC [0.75pt]

2) Démontrer que les vecteurs \vec{u} et $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ sont colinéaires [0.5pt]

3) Montrer que $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = 9\|\vec{u}\|$ et en déduire l'aire du triangle ABC en fonction de la norme de \vec{u} . [0.5pt]

4) Soit $D(1 ; 1 ; 1)$ un point de l'espace.

a) Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? [0.5pt]

b) Calculer le volume V , en unité de volume, de la pyramide de sommet D et de base le triangle ABC . [0.5pt]

EXERCICE 3 (03,5pts)

1. a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E) : z^2 - 2z + 4 = 0$ [0.5pt]

b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E) . [0.5pt]

2. Dans le repère rapporté à un repère orthonormé directe $(O ; \vec{u}; \vec{v})$, on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2.

Placer les points B et C d'affixes respectives $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $2e^{-\frac{i\pi}{3}}$. [0.5pt]

3. Soit $\theta \in]-\pi ; \pi]$ et M le point du cercle (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.

On désigne par N le point de (Γ) tel que $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Justifier que N a pour affixe $2e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}$. [0.5pt]

4. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Soit F et K les milieux respectifs des segments $[BM]$ et $[CN]$. Montrer que $r(F) = K$. [0.5pt]

b) En déduire la nature du triangle AFK. [0.25pt]

5. a) Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos(\theta + \frac{\pi}{6})$. [0.5pt]

b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant. [0.25pt]

EXERCICE 4 :(03,5pts)

A- On considère l'équation (E): $x^5 - 209x + 56 = 0$

1) Démontrer que (E) admet trois solutions réelles, dont on donnera le signe. [0.75pt]

2) a- Démontrer que deux de ces solutions ont pour produit 1 et calculer leur somme. [0.75pt]

b- En déduit ces deux solutions et déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la troisième solution [0.75pt]

B- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$; démontrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n de degré n tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!P_n(x)}{2(x^2-1)^{n+1}}$ [0.75pt]

C- Démontrer que pour tout nombre réel $x \in [0; \frac{1}{2}]$ on a : $1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$ [0.5pt]

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5 points)

Situation :

Monsieur FOTSO est Comptable dans une société de micro finance. Il a un chantier qui n'est malheureusement pas desservi par une voie que peut emprunter un engin à moteur. Il achète le sable et a versé chez son voisin situé à une centaine de mètres du chantier. Ce sable livré par une société et acheter à raison de 15000F le mètre cube (m^3) est contenu dans un bac plein de forme parallélépipédique de dimensions $3m \times a \times b$ m où a et b vérifient en mètre le

$$\text{système : } \begin{cases} \text{ppcm}(a, b) = a + 3 \\ \text{pgcd}(a, b) = 2 \end{cases}$$

Ce sable devrait être transporté en 100 tours dans des seaux identiques et pleins par des garçons et des filles du quartier. Les garçons ont effectué 8 tours et les filles 5 tours. Pour les motiver, il leur propose un taux forfaitaire de 1000F par personne.

Frustré par ce problème qui le préoccupe, monsieur FOTSO rejoint son lieu de service. Mais malheureusement il a oublié le mot de passe de son ordinateur. En fouillant ses documents, il tombe sur ce message : mot de passe « WSAYZ ». Le procédé de décodage est le suivant : à chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25. Ensuite, le procédé de décodage continu de la façon suivante :

Étape 1 : A la lettre que l'on veut décoder, on associe le nombre x correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $17x + 5$ par 27 et on le note m.

Étape 3 : Au nombre m, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Tâches :

1. Déterminer le prix d'achat du sable. [1.5pt]

2. Déterminer le montant nécessaire à prévoir par Mr FOTSO pour satisfaire les transporteurs sachant qu'il y a plus de garçons que de filles. [1.5pt]

3. Décoder le mot de passe de l'ordinateur de Mr FOTSO. [1.5pt]