

Epreuve de Mathématiques
Examinateur : M. TEBAYA AMBROISE

Exercice 1 / (03 points)

L'unité de longueur est le centimètre. Soit A, B et C trois points non alignés tels que $AB = a$; $AC = b$ et $BC = c$.

Soit I milieu de $[AB]$ et G le point tel que $G = \text{bar}\{(A, 2); (B, 2); (C, -1)\}$.

1. Démontrer que les points G, I et C sont alignés. 0,5pt
2. Les nombres a, b et c vérifient le système :
$$\begin{cases} a + 2b + c = 14 \\ 3a + b - c = 10 \\ 2a - b + 3c = 11 \end{cases}$$
 - a. Calculer a, b et c. 0,75pt
 - b. En déduire la nature du triangle ABC. 0,25pt
3. Sachant que $AB = 3$, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
 - a. $MA^2 + MB^2 = a^2$ 0,75pt
 - b. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = a$ 0,75pt

Exercice 2 / (03,5 points)

1. Calculer 227^2 0,5pt
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2x^2 + 203x - 1290 = 0$ 1pt
3. Ambroise a placé une somme de 120 000FCFA dans une banque au taux de $x\%$ pendant un an. La banque ayant connu des problèmes, Ambroise a retiré son capital ainsi que ses intérêts annuels et a placé toute la somme ainsi obtenue dans une autre banque au taux de $y\%$ pendant un an. Il a alors obtenu un intérêt de 9 540FCFA dans cette dernière banque.
 - a. Sachant que $y - x = 1,5$; Démontrer que x vérifie l'équation (E) de 2) 1,5pt
 - b. Calculer le taux d'intérêt dans la première banque. 0,5pt

Problème / (15 points)

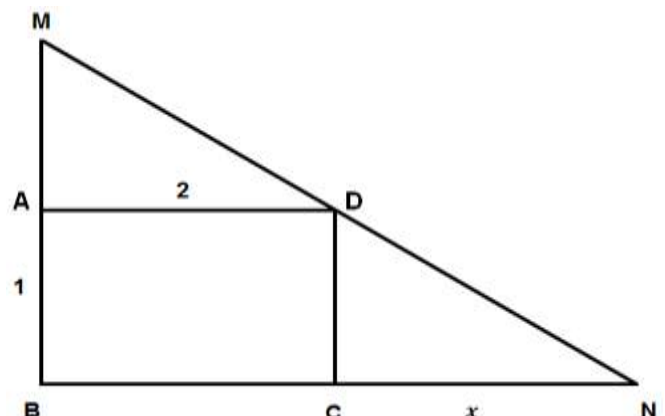
Les parties A, B et C sont liées

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O; I; J).

Partie A / 02 points

Observez la figure ci-contre. ABCD est un rectangle tel que $AB = 1$ et $AD = 2$. On désigne par $\mathcal{B}(x)$ l'aire du triangle BMN. On se propose de déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle BMN est minimale. On pose $CN = x$

1. Montrer que $AM = \frac{2}{x}$ 0,5pt
2. Montrer que l'aire du trapèze BNDA est $\mathcal{A}(x) = \frac{x}{2} + 2$ 0,5pt



3. En déduire que l'aire du triangle BMN est $\mathcal{B}(x) = \frac{x^2+4x+4}{2x}$.

1pt

Partie B /

09 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{2x}$ et dont (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis l'écrire sous forme d'une réunion d'intervalles. **0,75pt**
 b. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f . **1pt**
2. a. Donner les variations de f sur D_f **0,75pt**
 b. Dresser le tableau de variation de f . **0,75pt**
 c. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle BMN est minimale **0,5pt**
3. a. Déterminer les réels a, b et c tels $\forall x \in D_f$ on a : $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x}$ **0,75pt**
 b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 2 \right) \right]$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. **0,75pt**
 c. Etudier le signe de $\varphi(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 2 \right)$ puis déduire la position relative entre la courbe (C_f) de f et la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$. **1pt**
4. Démontrer que le point $I(0 ; 2)$ est un centre de symétrie de (C_f) . **0,75pt**
5. Construire (C_f) et ses asymptotes **1,25pt**
6. Déterminer graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $(E): x^2 + (4 - 2m)x + 4 = 0$ **0,75pt**

Partie C /

(04 points)

On donne la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4u_n + 4}{2u_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer les termes u_1 et u_2 . **0,5pt**
2. Représenter les 4 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. (Utiliser la courbe ci-dessus) **1pt**
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) **0,5pt**
4. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par: $v_n = u_n - \frac{4}{u_n} - 4$
 a. On suppose que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. Exprimer v_n en fonction de n . **0,75pt**
5. On pose : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$. Calculer S_n en fonction de n et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$. **1,25pt**