Région de l'Adamaoua | Année scolaire 2021-2022
Collège Protestant de Ngaoundéré | Classe : Terminale C / Durée : 3h

EPREUVE DE MATHEMATIQUES : TEST No 1 – Coef 07 (deux pages)

Evaluation ressources : Nombres complexes (/7pts) ; Arithmétique (/8pts) . **Evaluation/compétences :** Arithmétique (/5pts).

Copie remise le :   /   / 2021. **Nom(s)+signature du parent** :

Evaluation des ressources (15 pts) [S'il vous plait, 01pt -> 9 minutes]

Exercice 1 : (05 pts) sources LB. NJ + Tle SM CIAM

I- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1) : $z^2 - 2z.cos\alpha + 1 = 0$ où α est un paramètre réel (z est l'inconnue). (1pt)

2) Donner la formule trigonométrique des solutions de l'équation (E_n) :$z^{2n} - 2z^n cos\alpha + 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}^\star$ (1pt)

II- Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n cos\alpha + 1$

1) Montrer que $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}[z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)z + 1]$ (0,75pt)

2) a- Calculer $P_\alpha(1)$ (0,25pt)

b- En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1} sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{sin^2(\frac{\alpha}{2})}{4^{n-1}}$ (0,75pt)

3) pour tout $\alpha \in]0\,;\pi[$ et pour tout entier naturel n ≥ 2, on pose :

$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n})$

Montrer que $2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2n})}$. (0,75pt)

III) Pour trois entiers naturels non nuls a, b, c, montrer que : $ab < c$ implique que $a + b \leq c$. (0,5pt)

Exercice 2 : (05 pts) sources LB. NJ + Tle SM CIAM

1) a) Démontrer la proposition suivante par récurrence sur l'entier naturel n.

P(n) : " $\forall n \in IN^*$, $\frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ " (1pt)

b) En déduire, sous forme de fraction irréductible, le réel a défini par :

$a = \frac{1}{10\times11} + \frac{1}{11\times12} + \frac{1}{12\times13} + ... + \frac{1}{99\times100}$. (1pt)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $9Z^3 - 6Z^2 + 2Z = 0$. (2pts)

3) Déterminer l'ensemble des couples $(a\,; b)$ d'entiers naturels tels que

$2.PPCM(a\,;b) + 3.PGCD(a\,;b) = 11$ (E) (1pt)

Exercice 3 : (05 pts) ***Conçu et proposé par « PAA OUM »***

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres appelés **rep-units** (répétition de l'unité) : ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1.

Soit k un entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres. Ainsi N_2 =11 ;

1) Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition en facteurs premiers d'un rep-unit. Justifier votre réponse. (0,5pt)
2) Donner la décomposition en facteurs premiers de N_3 , N_4 et N_5. (0,75pt)

3) Soit n un entier strictement supérieur à 1. On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1.
   - a- Montrer que, dans son écriture décimale, n se termine lui-même par 1 ou par 9. (0,5pt)
   - b- Montrer qu'il existe un entier m tel que n s'écrive sous la forme 10m+1 ou 10m-1. (0,5pt)
   - c- En déduire que $n^2 \equiv 1[20]$. (0,25pt)

4) a- Soit k >2. Quel est le reste de la division de N_k par 20 ? (0,25pt)
   b- En déduire qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré. (0,25pt)

5) Montrer que $N_k = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \cdots + 10^0$ (0,25pt)

6) Prouver que $N_k = \frac{10^k - 1}{9}$. Peut-on être certain que 10^k -1 est divisible par 9 ? (0,5pt)

Rappel : $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$ pour x réel.

7) On se propose de démontrer que si k n'est pas premier, alors N_k n'est pas premier.
   a- On suppose que k est pair et on pose k=2q, où q est un entier plus grand que 1.
   Montrer que N_k est divisible par N_2=11 (0,25pt)
   b- On suppose que k est multiple de 3 et on pose k=3q, où q est un entier plus grand que 1.
   Montrer que N_k est divisible par N_3=111 (0,25pt)
   c- On suppose k non premier et on pose k=pq , où p et q sont des entiers plus grand que 1.
   En déduire que N_k est divisible par N_p. (0,25pt)

8) Donner une condition nécessaire pour que N_k soit premier. Cette condition est telle suffisante ? (0,5pt)

Evaluation des compétences (05 pts) ***Conçu et proposé par « PAA OUM »*** **[S'il vous plait, 01,5pt -> 13,5 minutes]**
Résoudre une situation problème, déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématique dans les situations de vie où intervient l'arithmétique.

Situation-problème : ***Cet exercice aborde le cryptage de données dans le système RSA***

Une ingénieure Alima (qu'on appellera « A. » pour simplifier) travaillant dans le service de codage/cryptographie/transmission de l'armée camerounaise, choisit deux nombres p et q, puis calcule les produits $N = pq$ et $n = (p-1)(q-1)$. Elle choisit également un entier naturel c premier avec n.

L'ingénieure A publie le couple (N ; c), qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.

Les messages à envoyer sur le terrain d'opération sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et N-1. Pour crypter un entier a de cette suite, on procède ainsi : on calcule le reste b de la division euclidienne par N du nombre a^c, et le nombre crypté est l'entier b.

Pour décrypter les messages reçus des services du Ministère de la Défense Camerounais, l'ingénieure **A.** calcule dans un premier temps l'unique entier naturel d vérifiant la condition $0 \leq d < n$ et $cd \equiv 1[n]$. Elle garde secret ce nombre d qui lui permet ensuite, à elle et elle seule, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.

Pour décrypter un nombre crypté b, l'ingénieure **A**. calcule le reste $\boldsymbol{a}$ dans la division euclidienne par N du nombre b^d, et le nombre en clair (c'est-à-dire avant le cryptage) est le nombre $\boldsymbol{a}$.

Ici, nous prendrons **p=5, q=11 et c=23.**

1) Si un émetteur envoie à **A.** le nombre $a = 8$, quelle est la valeur du nombre crypté b reçu ? (1,5pt)

2) Si l'ingénieure **A.** reçoit le message crypté $b = 6$, quelle est le nombre à envoyer ? (1,5pt)

3) Si un émetteur envoie à **A.** le nombre $a = 1$, quelle est la valeur du nombre crypté b reçu ? (1,5pt)

L'AP Timene et Dr Kouakep [qui notent surtout la qualité du raisonnement et de la rédaction].

Présentation générale: **0,5 point** [*« Don't forget to protect ourselves from Covid19 by following the barrier measures »*, Dpt of Mathematics]