COLLEGE BILINGUE BARY		Session Diagnostique
Année Scolaire : 2022 / 2023		Matière : Mathématiques
Classes : Tle D		Durée : 4 heures
Date de Passage : 17/1/2023	Examinateur : Dpt Maths	Coefficient : 4

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES……………………………………………………[15 POINTS]

EXERCICE 1:……………………………………………………………………………………………[6.25 points]

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3-\left(2+i\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1+i\sqrt{2}\right)z-2i\sqrt{2}$.
   a) Montrer que le nombre complexe $z_0=i\sqrt{2}$ est une racine de P. **0,25pt**
   b) Déterminer les complexes a et b tels que $\forall\ z\ \in\mathbb{C},\ P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$. **0,5pt**
   c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$. **0,75pt**
2) On considère les points A,B,J et K d'affixes respectives $z_A=1+i, z_B=1-i, z_J=i\sqrt{2}$ et $z_K=e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
   a) Placer les points A,B,J et K. **0,5pt**
   b) Soit L le symétrique du point J par rapport au point K.
   Montrer que l'affixe du point L est $z_L=-\sqrt{2}$. **0,5pt**
   c) Montrer que les points A,B,J et K appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. **0,5pt**
   d) Soit D le point d'affixe $z_D=-1+i$. On considère la rotation r de centre O qui transforme J en D.
      i) Déterminer l'écriture complexe de la rotation r. **0,5pt**
3) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que $|2z-2-2i|=8$ **0,5pt**
4) Soit S la transformation qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z$
   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S **0,75pt**
   b) Calculer l'affixe du point A' image du point A par S **0,25pt**
   c) Déterminer l'expression analytique de S **0,5pt**
   d) Déterminer et construire l'ensemble (C') image de l'ensemble (C) par S. **0,75pt**

EXERCICE 2:……………………………………………………………………………………………[2.5 points]

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaires en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où X désigne le numéro du mois et Y le chiffre d'affaires correspondant.

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	13	15	19	21	22

1) Calculer les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des séries marginales de caractères respectifs X et Y. **0,5pt**
2) Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double.
   (unités : 1 cm pour 1 unité en abscisses et 1cm pour 2 unités en ordonnées) **0,5pt**
3) Calculer la variance V(X) de la série marginale de caractère X et la covariance Cov(X, Y) de la série double de caractère (X,Y) (donner les résultats sous forme de fraction irréductibles). **0,75pt**
4) Démontrer qu'une équation de la droite (D) de régression de y en x est : $y=\frac{78}{35}x+9{,}2$ **0,5pt**
5) En utilisant la droite (D), donner une estimation arrondie à l'unité du chiffre d'affaires de ce pharmacien à la fin du 7e mois. **0,25pt**

EXERCICE 3:……………………………………………………………………………………………[1,5 points]

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\ln(e^{u_n}+1)\end{cases}$ et on pose pour tout $n\in\mathbb{N},\ v_n=e^{u_n}$

1) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique que vous caractériserez. **0,5pt**
2) Exprimer v_n et u_n en fonction de n. **0,5pt**

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Montrer que $S_n = \ln(n!)$, puis calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$. **0,5pt**

<u>EXERCICE 4</u>:...[4,75 points]

I) Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ définie par :

$$g(x) = -x^2 - 2 + 2lnx$$

1) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **0,5pt**
2) Déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . **0,5pt**

II) On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = -x + 5 - \frac{2lnx}{x}$.

On note (C) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique sur les axes : 1 cm.

1) Calculer les limites de h à droite de 0 et en $+\infty$. **0,5pt**
2) a) Vérifier que pour tout réel x strictement positif, $h'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. **0,5pt**
b) Déduire le signe de $h'(x)$ et dresser le tableau de variation de h. **0,5pt**
3) Montrer que la droite $(D): y = -x + 5$ est asymptote à (C) et étudier la position relative de (C) par rapport à la droite (D) . **0,5pt**
4) a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in [4;5]$. **0,25pt**
b) Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}. **0,25pt**
5) Tracer (C) et (D) **0,75pt**
6) Montrer que h réalise une bijection de $]0;1]$ vers un intervalle J à préciser, pus construire la courbe de h^{-1} dans le même repère. **0,5pt**

<u>PARTIE B</u> : EVALUATION DES COMPETENCES...[4,5 POINTS]

<u>Situation :</u>

Jonas réside dans un quartier où il y a des problèmes à s'approvisionner en eau potable. Il contacte alors une entreprise pour le lui construire un forage sur une partie **T1** de son terrain dont la nature dans un plan complexe muni d'un repère convenablement choisi est donnée par l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation $|i\,z - 3i - 1| \leq |3i - 1|$. Pour le défrichage du terrain, les techniciens de l'entreprise lui demandent 350 frs par mètre carré. L'unité dans ce repère étant de 10 mètre. Pour réaliser la construction du forage, l'entreprise demande à Jonas une somme totale de 160 000 FCFA et ce dernier propose de payer par semaine et de la manière suivante : la première semaine il verse 150 000 FCFA et chaque semaine il augmente le montant versé de 2% par rapport à la semaine précédente.
Une fois le forage construit, Jonas observe entre 7 heure et 23 heure le débit de ce dernier qui est modélisé par la fonction $d(t) = 2t^3 - \frac{217}{2}t^2 + 1927t$ où t répresente le temps exprimé en heure.

<u>Tâches :</u>

1) Combien dépensera Jonas pour le défrichage de son terrain ? **1,5pt**
2) Quel est le nombre minimum de semaine qu'l faudra à Jonas pour payer la totalité du montant à l'entreprise? **1,5pt**
3) A quel moment de la journée le débit de ce forage sera-t-il maximal ? **1,5pt**

<u>PRESENTATION</u>:...0,5pt