LYCÉE DE BANGOULAP

Évaluation de la Troisième séquence

Classe :	TERMINALE D	Durée :	4 heures	Année scolaire :	2022/2023
Épreuve :	MATHÉMATIQUES	Coef. :	4	Par	DJOUTSOP Emile

PARTIE A : Évaluation des ressources

EXERCICE 01: (06 points)

I- 1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4z+8=0$. Puis écrire les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. 0,75 pt

b) Placer les images A et B des solutions dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ du plan complexe (A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est négative). 0,5 pt

c) Quelle est la nature exacte du triangle OAB ? 0,5 pt

2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f. 0,75 pt

b) Déterminer sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par f. 0,75 pt

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$. 0,75 pt

II- 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+2i)\left(z^2-(5+i)z+8+4i\right)=0$. 0,75 pt

2. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $2+2i;\ 3-i$ *et* $-2i$ et S la similitude directe de centre B qui transforme A en C.

a) Donner l'écriture complexe de S, déduire son rapport et son angle. 0,75 pt

b) Déterminer l'expression analytique de S. 0,5 pt

EXERCICE 02: (03 points)

1. Déterminer une primitive sur IR de la fonction $k(x)=\sin^3 x\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x$. 0,5 pt

2. Soit f la fonction définie sur $IR\setminus\{3\}$, par $f(x)=\frac{x^2-4x+2}{(x-3)^2}$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall x\in IR\setminus\{3\}$, $f(x)=a+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$. 0,5 pt

b) En déduire la primitive F de f sur $]-\infty;3[$ qui prend la valeur 5 en 2. 0,5 pt

3. Soit la fonction g définie dans $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a) Montrer que pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$. 0,75 pt

b) En déduire la primitive H de la fonction $h: x\mapsto\frac{1}{\cos^4 x}$ qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{4}$. 0,75

EXERCICE 03: (06,5 points)

PARTIE A : On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=2x^3-1+2\ln x$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. 1pt

2. a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α. 0,5 pt

b) Vérifier que $0,86<\alpha<0,87$. 0,25 pt

3. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$. 0,25 pt

PARTIE B : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x-\frac{\ln x}{x^2}$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. 0,5 pt
2. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=2x$ est asymptote oblique à (C) puis étudier les positions relatives de (C) et (Δ). 1 pt
3. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$. 0,5 pt
4. Déduire le tableau de variation de la fonction f. 0,5 pt
5. Construire (Δ) et (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. On prendra comme unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées. 1 pt
6. a) Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}$. 0,5 pt

   b) En déduire la primitive de f qui s'annule en 1. 0,5 pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES: (04,5 points)

ESSO et YOPA sont deux grands commerçants d'une ville A. La **Figure 1** ci-dessous est la carte du réseau routier d'une ville du Cameroun sur laquelle on a précisé la consommation en carburant entre deux quartiers. ESSO n'a plus assez d'argent sur lui et son tableau de bord indique qu'il y' encore 21 litres d'essence dans le réservoir de son véhicule. Cependant, il doit impérativement livrer une marchandise dans la ville F avant la fin de la journée.

YOPA quant-à lui a des livraisons à faire dans 8 supermarchés (partant du supermarché S au supermarché E) d'une autre ville X dont les liaisons possibles sont données par la **Figure 2** ci-dessous. Les poids sur les arêtes représentent la durée moyenne en heures de parcours dudit trajet. Ne disposant que de 13 heures pour faire ces livraisons dans cette ville avant de passer à la prochaine, YOPA cherche à connaître le trajet qu'il devra emprunter pour terminer ces huit livraisons à temps.

A la fin de sa livraison, YOPA a regroupé dans le tableau ci-dessous la production moyenne en tonne y de son jardin en fonction du nombre d'année pendant 10 ans. Par des calculs, il désire estimer la production de son jardin la quinzième année ; si le couple $(x;y)$ formé de l'année x et de sa production y est solution de la droite de régression de y en x obtenue à partir de la méthode des moindres carrés.

année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
production (y_i)	3	4	5,1	6	7,5	8	9,4	10,5	11,5	13

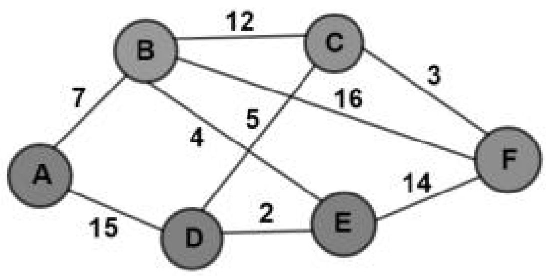

Figure 1.

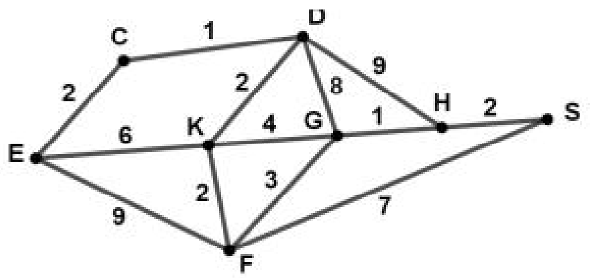

Figure 2.

Tâches :

1- ESSO pourra-t-il arriver dans la ville F avec cette quantité de carburant ? 1,5 pt
2- Quel itinéraire doit prendre YOPA pour terminer sa livraison à temps ? 1,5 pt
3- Aider YOPA à déterminer sa production la quinzième année. 1,5 pt