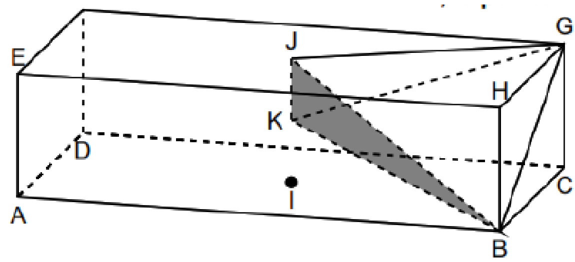
REPUBLIQUE DU CAMEROUN **Année Scolaire :** $2022 - 2023$
Ministères des Enseignements secondaires **Classe :** $T^{le}\ C$
GROUPE LES « GENIES DU SUCCES » **Coefficient :** 7 **; Durée :** $4h00$.
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : $(15,5\ \boldsymbol{points})$

Exercice 1 : $(4\ \boldsymbol{points})$

L'unité est le centimètre. Ci-contre, $ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que : $AE = 2$, $AD = 4$, et $AB = 8$. Les points I et J sont les centres des rectangles $ABCD$ et $EFGH$, K est le milieu du segment $[IJ]$. On note par S le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -1)$ et $(C, 1)$. On désigne par (P) le plan passant par les points B, G et K puis par (Γ) l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :



$2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 16.$

1) Ecrire chacun des vecteurs suivants sans le symbole $\wedge$:
$\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DG} \wedge \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{AF}$. **0,75 pt**
2) Montrer que S est le milieu de $[AD]$, puis déterminer et caractériser l'ensemble (Γ). **0,75 pt**
3) Dans toute la suite, on munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ou l'on a $A(1, 2, 3)$; $B(1, 10, 3)$; $D(1, 2, 7)$; $E(1, 2, 5)$ et $F(3, 2, 7)$.
   a) Montrer que $G(3, 10, 7)$; $J(2, 6, 6)$ et $K(\frac{3}{2}, 6, \frac{11}{2})$. **0,75 pt**
   b) Montrer que les points B, G, J et K ne sont pas coplanaires. **0,5 pt**
   c) Calculer le volume du tétraèdre $BGJK$. **0,5 pt**
   d) Etudier l'intersection de (P) et (Γ). **0,75 pt**

Exercice 2 : $(3,25\ \boldsymbol{points})$

1) Soit g la fonction définie sur $[0;\ \pi]$ par $g(x) = xsinx + cosx - 1$.
   a) Etudier les variations de g sur $[0;\ \pi]$. **0,5 pt**
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;\ \pi]$, et que $\alpha \in \left]\frac{2\pi}{3};\ \pi\right[$. **0,5 pt**
   c) Préciser le signe de $g(x)$ pour x élément de $[0;\ \pi]$. **0,5 pt**
2) Soit f la fonction telle que $f(x) = \begin{cases} \frac{1-cosx}{x} & si\ x \in]0;\ \pi] \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$
   a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. **0,5 pt**
   b) Etudier les variations de f sur $[0;\ \pi]$ **0,5 pt**
   c) Vérifier que $f(\alpha) = sin\alpha$. **0,25 pt**
3) On donne $\alpha \approx 2{,}34$ et $f(\alpha) = 0{,}72$. Construire (C_f) la courbe de f. **0,5 pt**

Exercice 3 : $(3,25\ \boldsymbol{points})$

W est l'espace vectoriel muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, f est l'endomorphisme de W dont la matrice relativement à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On donne la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on note h l'endomorphisme de W dont la matrice relativement à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est $A + B$.

1) Déterminer $kerf$ et préciser une base. **0,5 pt**
2) Déterminer Imf et préciser une base. **0,5 pt**
3) On pose $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} - \vec{k}$; $\overrightarrow{e_2} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_3} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.
   a) Montrer que $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ est une base de W. **0,25 pt**

http://sujetexa.com

b) Ecrire la matrice de f dans la base cette base. **$0,5\ pt$**

4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et g l'endomorphisme de W tel que $g(\vec{u}) = \alpha h(\vec{u}) - \vec{u}$.

a) Démontrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de W, $(gog)(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow \alpha = 0\ ou\ \alpha = \frac{2}{3}$. **$0,5\ pt$**

b) Ecrire la matrice de g dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour $\alpha = \frac{2}{3}$. **$0,5\ pt$**

c) Démontrer que $Im(h)$ est l'ensemble des points invariants de g. **$0,5\ pt$**

Exercice 4 : $(5\ points)$

I- Soit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n.(n!)}$.

1- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq a_n \leq b_n$. **$0,5\ pt$**

2- Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. **$0,25\ pt$**

3- Démontrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. **$0,25\ pt$**

4- En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes. **$0,5\ pt$**

5- Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. **$0,25\ pt$**

6- Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. **$0,25\ pt$**

II-

1- Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de 5^n par 7. **$0,5\ pt$**

2- Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^n$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4S_n = 5^{n+1} - 1$. **$0,25\ pt$**

b) Soit $a \in \mathbb{N}$, montrer que, $4S_n \equiv a[7]$ si et seulement si $S_n \equiv 2a[7]$. **$0,5\ pt$**

c) Déterminer tous les entiers n tels que S_n soit divisible par 7. **$0,5\ pt$**

3- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation (E): $5^n x + S_n y = 1$.

a) Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution. **$0,5\ pt$**

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E). **$0,75\ pt$**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES $(4,5\ points)$

L'évolution du chiffre d'affaires (en centaines de millions de Francs CFA) de l'entreprise de Mr Bouba dénommé SOTRA en fonction du numéro de l'année est regroupé dans le tableau ci-dessous :

Années	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Numéro de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
. Chiffres d'affaires y_i	3,5	4,8	4,3	5	5,6	6,2

Mr Bouba désire prévoir son chiffre d'affaires pour les années à venir. Pour ce faire, il contacte un technicien qui dit qu'il procèdera par la méthode des moindres carrés pour trouver un ajustement linéaire. A l'heure de pause, un lundi, il y a cambriolage a SOTRA . A la suite du vol, on interroge 4 témoins qui ont vu les bandits s'enfuir en voiture. Le premier dit que le numéro d'immatriculation comporte 4 chiffres. Le deuxième, que les deux premiers chiffres sont identiques. Le troisième que les deux derniers chiffres sont identiques. Le quatrième un élève en classe de terminale C a remarqué que le nombre en question est un carré parfait et que son chiffre des dizaines est compris entre 1 et 5, il dit en plus « un nombre dont les deux derniers chiffres sont impairs n'est jamais un carré parfait ». Apres ce vol, M. Bouba décide de mieux protéger SOTRA. Pour cela il décide alors d'acheter des fils électriques donc le mètre coute $15000Frs$ pour l'installer le long de SOTRA qui a la forme d'un quadrilatère à 4 côtés, tel que les sommets de cette figure sont les points images sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation(E): $z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$. Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $10m$ Notre élève de terminale C affirme que pour résoudre (E), on pourra déterminer deux réels a et b tels que $(E) \Leftrightarrow z^2\left[(z - \frac{1}{z})^2 + a\left(z - \frac{1}{z}\right) + b\right] = 0$.

Tache 1 : Donner une estimation du chiffres d'affaires de cette entreprise en 2035. **$1,5\ pt$**

Tache 2 : Quel est le numéro d'immatriculation du véhicule des bandits ? **$1,5\ pt$**

Tache 3 : Combien dépensera M. Bouba pour l'achat des fils électriques ? **$1,5\ pt$**