

Lycée Bilingue de Figuil			
Département de Mathématiques			
Evaluation n° 3	Classe : Tle D	Année scolaire : 2022/2023	Date : 24/01/2023
Epreuve de Mathématiques	Durée : 4H	Coef : 4	

Partie A/Evaluation des ressources/15,5pts

Exercice 1/ 5pts

I/ ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité G . Le point I est le milieu du segment $[AB]$. S est la similitude directe de centre A qui transforme G en C ; S' est la similitude directe de centre I qui transforme A en C .

Déterminer le rapport et l'angle de chacune des similitudes S et S' .

2pts

II/ On considère la transformation f_1 de P dans P qui, au point $M(z = x + iy)$ associe le point $M'(z' = x' + iy')$ tel que $z' = z + i$; puis la transformation f_2 de P dans P qui, au point $M(z = x + iy)$ associe le point $M_2(z_2 = x_2 + iy_2)$ tel que $z_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z - i$. Soit la transformation $f = f_2 \circ f_1$ qui, au point $M(z = x + iy)$ associe le point $M''(z'' = x'' + iy'')$.

1- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations f_1, f_2 et f . 2pts

2- Exprimer x'' et y'' en fonction de x et y . 0,5pt

3- Soit $(D) : x - y + 2 = 0$ une droite ; (D') son image par f . Ecrire une équation cartésienne de (D') .

Exercice 2/6,5pts

On considère les fonctions f et g définies sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$ et $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$

1- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. 1,5pt

2- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0,86 ; 0,87[$. 0,75pt

3- En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x . 0,5pt

4- Démontrer que la droite d'équation $(\Delta) : y = 2x$ est asymptote oblique à (C_f) , puis étudier la position relative de (Δ) par rapport à (C_f) . 0,75pt

5- Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis donner le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$. 1pt

6- Dresser le tableau de variation de f , puis tracer (Δ) et (C_f) dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra 2cm comme unité sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées. 1,5pt

7- Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$, puis en déduire la primitive de f qui s'annule en 1 0,5pt

Exercice 3/ 4pts

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{1}{4}(U_n^3 + 1)$. on définit sur $I = [0 ; 1]$ la fonction f par : $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$.

1- Etudier les variations de f , puis montrer que $f(I) \subset I$. 0,75pt

2- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \in I$. 0,75pt

3- Soit g la fonction définie sur I par : $g(x) = f(x) - x$.

a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur I une solution unique β . 0,25pt

b- Donner un encadrement de β à 10^{-1} . 0,25pt

4- a- Montrer que pour tout $x \in I, |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$. 0,5pt

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4}|U_n - \beta|$. En déduire que $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$. 1pt

c- Justifier que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite. 0,5pt

Partie B/ Evaluation des compétences/4,5pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité de longueur est le mètre. M. ZERMELO et M. BOLZANO sont des voisins. M. ZERMELO a un jardin triangulaire dont un sommet est repéré par son affixe $2 + 3i$; les affixes des deux autres sommets sont solutions de l'équation $z^2 + (2 + 3i)z - 2(1 - 2i) = 0$. Il souhaite le clôturer à l'aide d'un grillage dont le mètre coûte 1000 F. Le terrain de BOLZANO est un domaine ABCD dont les sommets A, B et C ont pour affixes respectives $-1 + i$, $1 + 5i$ et $3 - i$. Le point D est l'image du point C par la similitude directe de centre B qui transforme le point A en C. M. BOLZANO voudrait recouvrir toute la superficie de son terrain avec des carreaux ; le carton de carreaux coûte 15000F et peut recouvrir une superficie de 5m^2 .

M. ZERMELO a regroupé dans le tableau ci-dessous la production moyenne en tonnes de jardin la quinzième année si le couple (x, y) formé de l'année x et de sa production y est solution de l'équation de la droite de régression de y en x obtenue à partir de la méthode des moindres carrés.

Année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Production (y_i)	3	4	5,1	6	7,5	8	9,4	10,5	11,5	13

Tâches :

- 1- Aider ZERMELO à déterminer la production de son jardin la 15^{ème} année. 1,5pt
- 2- Quelle somme doit prévoir M. BOLZANO pour l'achat des carreaux pouvant recouvrir entièrement son terrain ? 1,5pt
- 3- Quelle somme d'argent doit prévoir M. ZERMELO pour entourer totalement son jardin ? 1,5pt

« Celui qui ne sait pas et qui sait qu'il ne sait pas est un chercheur qu'il faut aider »