LYCEE TECHNIQUE D'EDEA					
Examen	**Epreuve**	**Coef.**	**Durée**	**Classe**	**Année Scolaire**
Evaluation 3	**Mathématiques**	**3**	**3h**	**T^{le} F4 -BA**	**2022/2023**

EXERCICE 1 : 5 Points

1. On donne le nombre complexe : $z = \dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$.

a) Mettre z sous la forme algébrique, puis montrer que $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$. **1pt**

b) Déterminer de deux manières différentes les racines carrées de z. **1,5pt**

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{8}$. **1pt**

2. L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient (P) le plan d'équation cartésienne $2x - y + 2z - 14 = 0$ et (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z - 2 = 0$.

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R. **0,75pt**

b) Calculer la distance du point Ω au plan (P). **0,5pt**

c) En déduire la position relative de la sphère (S) par rapport au plan (P). **0,25pt**

EXERCICE 2 : 5 Points

1. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par $\begin{cases} U_1 = e^2 \\ e(U_{n+1})^2 = U_n \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$.

On pose $V_n = \dfrac{1+\ln(U_n)}{2}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **1pt**

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. **1pt**

c) On pose $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$ et $P_n = U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_n$.

i) Exprimer S_n et P_n en fonction de n. **1pt**

ii) Etudier la convergence de la suite (P_n). **0,5pt**

2. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{4x^2 - 8x + 6}{(2x-1)^2}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x différent de $\dfrac{1}{2}$,

$f(x) = a + \dfrac{b}{2x-1} + \dfrac{c}{(2x-1)^2}$. **0,75pt**

b) En déduire les primitives F de f sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$. **0,75pt**

PROBLEME : 10 Points

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (unité graphique : 2cm)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $g(x)=x^2-2\ln x$.

1. Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations. **1,5pt**

2. En déduire le signe de g sur $]0;\ +\infty[$. **0,5pt**

Partie B : Etude de la fonction f.

1. Déterminer la limite de f en 0^+. Interpréter graphiquement ce résultat . **0,5pt**

2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. **0,75pt**

b) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ) sur $]0;\ +\infty[$. **1pt**

3. a) Montrer que pour tout $x\in\,]0;\ +\infty[,\ f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$. **0 ,75pt**

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. **1pt**

4. Montrer qu'il existe un unique point A de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente (T) est parallèle à la droite (Δ) et préciser les coordonnées du point A. **0,75pt**

5. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0;\ +\infty[$. **0,5pt**

b) Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α. **0,5pt**

c) Montrer que le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α est supérieur à 1. On admettra que $0{,}31<\alpha<0{,}35$. **0,75pt**

6. Tracer avec soin la courbe $\mathscr{C}$ et les droites (Δ) et (T). **1,5pt**