

<b>LYCEE BILINGUE DE BAMYANGA</b>			
<b>DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES</b>			
<b>Deuxième Évaluation</b>	<b>Classe : T<sub>c</sub></b>	<b>Année scolaire 2022-2023</b>	<b>Date :</b>
<b>Épreuve de mathématiques</b>	<b>Durée : 4h</b>	<b>Coef : 7</b>	<b>22 /11/ 2022</b>

### PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/15.5 points

#### EXERCICE 1 (2.75 points)

1. Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère l'équation (E) :

$$z^3 + (6 + 2i)z^2 + (6 + 8i)z + 8 + 12i = 0.$$

a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure. 0.5pt

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que : 0.5pt

$$(E) \Leftrightarrow (z + 2i)(z^2 + az + b) = 0.$$

c) Dédurre la résolution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation (E). 1pt

2. Soit  $\alpha$  un nombre réel de l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 \cos^2 \alpha - z \sin 2\alpha + 2 - \cos^2 \alpha = 0$  0,75pt

#### EXERCICE 2 (2.75 points)

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x\sqrt{1+x^2} - 1$ .

a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ . 1pt

b) Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ . 0.75pt

2. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0; \frac{1}{2}]$ , on a :

$$1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

1pt

#### EXERCICE 3 (4 points)

1. Soit  $p$  un nombre premier.

a) Démontrer que pour tout entier  $k$  tel que  $1 < k < p$ ,  $C_p^k$  est un multiple de  $p$ . 0.75pt

b) En déduire que pour tous entiers relatifs  $a$  et  $b$ , on a :  $(a + b)^p \equiv a^p + b^p [p]$ . 0.5pt

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $a$ ,  $a^p \equiv a [p]$ . 0.75pt

d) En déduire que si  $a$  et  $p$  sont premiers entre eux, alors  $a^{p-1} \equiv 1 [p]$ . 0.5pt

2. On considère dans  $\mathbb{N}^3$  le système (S) : 
$$\begin{cases} p^2 + q^2 = r^2 \\ p + q + r = 24 \\ r < p + q \end{cases}$$

a) Démontrer qu'un triplet  $(p; q; r)$  est solution de (S) si et seulement si  $r < 12$  et  $(p; q)$  sont les solutions de l'équation :  $n^2 - (24 - r)n + 24(12 - r) = 0$ , où  $n$  est l'inconnue. 1pt

b) Résoudre le système (S). 0.5pt

#### EXERCICE 4 (5.5 points)

I) soit la fonction  $f$  définie sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  par :  $f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$

1. Démontrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ . 0,5pt

2. Déterminer l'ensemble sur lequel  $f^{-1}$  est dérivable. 0,25pt

3. Démontrer que :  $(f^{-1}(x))' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-2x}}$ .

1pt

II) On considère la fonction  $h$  définie par :  $h(x) = \sqrt{|x^2 - x - 2|}$ .

a) Étudier la dérivabilité de  $h$  aux points d'abscisses -1 et 2 respectivement.

0.5pt

b) Étudier les branches infinies de la courbe représentative  $(C_h)$  de  $h$ .

1pt

c) Calculer  $h'(x)$  dresser le tableau de variations de  $h$ .

0,5pt

d) Construire la courbe représentative de  $h$  dans un repère orthonormé  $(O ; I, J)$ .

1pt

e) Démontrer que la courbe  $(C_h)$  de  $h$  dans l'intervalle  $[-1 ; 2]$  est un demi-cercle dont on précisera le centre et le rayon.

0,75pt

### PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES/5 points

#### Situation

Monsieur MOUSSA est un enseignant de mathématiques qui appartient à une famille très riche du Nord Cameroun. Sa famille possède des parcelles de terres et un grand poulailler. Son fils ALI qui est élève en Terminale C est très curieux de connaître le nombre de parcelles de terres et le nombre de volailles que possède sa famille. Mais son père qui veut vérifier si ALI sait utiliser ses connaissances mathématiques lui répond de manière énigmatique :

- Le nombre de parcelles est le plus petit nombre entier naturel tel que le nombre  $\overline{x32y}$  écrit dans le système de numération de base 5 soit divisible par 3 et par 4 ;
- Le nombre de volailles est le plus petit entier naturel divisible par 6 dont l'écriture en base 7 est  $\overline{\alpha 43\beta}$ .

PAUL, ami de MOUSSA et vivant aux ETATS-UNIS souhaiterait connaître au cours d'une conversation téléphonique le nombre d'enfants de la famille de MOUSSA. Il lui répond au téléphone que le nombre d'enfants de sa famille est le chiffre des dizaines, dans le système décimal, de l'entier naturel :  $(3548)^9 \times (2537)^{31}$ .

#### Tâches :

1. Combien de parcelles de terres possède la famille de ALI ?

1.5pt

2. Combien de volailles possède la famille de ALI ?

1.5pt

3. Quel est le nombre d'enfants de la famille de MOUSSA ?

1.5pt

Présentation : 0.5pt

EXAMINATEUR : M. NOUMSSI