Année scolaire : 2022-2023
Classe : Terminale D
Durée : 4 **heures**
Séquence $N°4$ **février 2023**

PARTIE A : Évaluation des Ressources : 15.5 points

Exercice 1 (5 points)

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :
$P(z) = z^3 + (-5-2i)z^2 + (5+4i)z + 2i - 9$

1. (a) Justifier que le polynôme P a une racine complexe imaginaire pur $i\beta$ que l'on précisera. **0.5pt**
   (b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que $p(z) = (z-i\beta)(z^2+az+b)$. **0.5pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **0.75pt**
3. Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$. UNITE : $2cm$ sur les axes. On considère les points A, B, C, E et F d'affixes respectifs $z_A = -i$, $z_B = 4+i$, $z_C = 1+2i$, z_E et z_F tels que E et le milieu du segment $[AB]$ et F le barycentre des points $(A;-2);(B;5);(C;3)$.
   (a) Trouver z_E et z_F. **0.5pt**
   (b) Calculer $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et en déduire la nature précise du triangle ABC. **0.5pt**
4. On considère la similitude directe s dont le point A est un point invariant et qui transforme B en C.
   (a) Determiner l'écriture complexe de s et en déduire son écriture analytique. **1pt**
   (b) Trouver les éléments caractéristiques de s et donner $s(E)$. **0.75**pt
   (c) Déterminer l'image par s de l'ensemble Γ des points du plan tels que $x^2+y^2-4x-6y-12=0$.**0.5**pt

Exercice 2 (5 points)

I-) Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = -x^2 - 2 + 2\ln x$

1. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **(0,75 pt)**
2. Déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **(0,25 pt)**

II-) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = -x+5-\dfrac{2\ln x}{x}$. On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique sur les axes : 1 cm.

1. Calculer les limites de f à droite de 0 et en $+\infty$. **(0,5 pt)**
2. (a) Vérifier que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. **(0,5 pt)**
   (b) Déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. **(0,5 pt)**
3. Montrer que la droite (D) : $y = -x+5$ est asymptote à (C_f) et étudier la position relative de (C_f) par rapport à la droite (D). **(0,5 pt)**
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [4;5]$. **(0,5 pt)**
   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}. **(0,25 pt)**
5. (a) Tracer (D) et (C_f). **(0,75 pt)**
   (b) Montrer que f réalise une bijection de $]0;1]$ vers un intervalle J à préciser, puis construire la courbe de f^{-1} dans le même repère. **(0,5 pt)**

Exercice 3 (5,5 points)

I-) On considère la suite (U_n) à termes positifs et définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} U_1 = 1 \\ (U_{n+1})^2 = 4U_n \end{cases}$

1. Calculer $U_2; U_3$ sous forme de puissance de 2. **(0,5 pt)**
2. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $V_n = \ln\left(\dfrac{U_n}{4}\right)$.
   (a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. **(0,5 pt)**

(b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. **(0,5 pt)**

3. On pose $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ et $P_n = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$

   (a) Montrer que $S_n = 4\ln 2\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)$. **(0,5 pt)**

   (b) Déduire la valeur exacte de P_n en fonction de n. **(0,5 pt)**

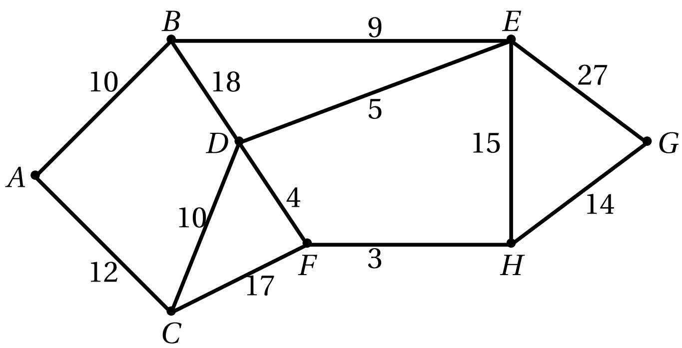
II-) Pour chacune des questions suivantes, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est juste. Recopie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse juste : **NB : Bonne réponse** $+0.75$**, mauvaise réponse :**-0.5

1. L'ensemble solution de l'inéquation $e^{-x+5} > 3$ est :
   a) $]-\infty; 5-\ln 3[$ b) $]5-\ln 3; +\infty[$ c) $]-\infty; \ln 3 - 5[$ d) $]-\infty; \ln 3 + 5[$
2. L'équation $(E') : 4\ln^3 x + 8\ln^2 x - 5\ln x = 0$ a pour ensemble solution dans $\mathbb{R}$:
   a) $S = \left\{1; \sqrt{e}; e^{-\frac{5}{2}}\right\}$ b) $S = \left\{1; -\sqrt{e}; e^{-\frac{5}{2}}\right\}$ c) $S = \varnothing$ d) $S = \left\{-1; \sqrt{e}; e^{-\frac{5}{2}}\right\}$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{1+e^x} =$
   a) 1 b) -1 c) $-\infty$ d) $+\infty$
4. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{u}; \vec{v})$, on donne le point K d'affixe i, l'écriture complexe de la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est :
   a) $z' = iz - 1 - i$ b) $z' = -iz - 1 + i$ c) $z' = -iz - 1 - i$ d) $z' = -iz + 1 - i$

Evaluation des Compétences : 4,5 points

Jonas est propriétaire d'une entreprise de pharmacie dans la ville du pays. Il observe durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaires en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où X désigne le numéro du mois et Y le chiffre d'affaires correspondant.

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	13	15	19	21	22



Par ailleurs, dans le graphe ci-dessus, les lettres sont les initiales des carrefours de la ville et les nombres entiers sont les longueurs des routes en km liant les unes aux autres, pour pallier au problème de taxi, Jonas recrute un chauffeur pour transporter le personnel de son entreprise du carrefour **A** pour le site du travail situé au carrefour **G** et ce dernier emprunte le chemin le plus cours. il quitte le carrefour A tous les matin à 6h10min et roule à une vitesse constante de $60 km/h$. L'entreprise de Jonas étant très florissante, ce dernier pense à motiver son personnel. Il décide alors d'augmenter le salaire mensuel de chaque employé de 2% par rapport au mois précédent. Willy qui est un employé de cette entreprise a un salaire de 150 000 FCFA en fin janvier 2023. Ce dernier est préoccupé car il aimerait savoir à partir de quel mois son salaire atteindra la barre de 160 000 FCFA.

1. Donner une estimation du chiffre d'affaires de Jonas à la fin du 10e mois en utilisant la méthode des moindres carres. **(1,5 pt)**
2. Aider Willy à répondre à sa préoccupation. **(1,5 pt)**
3. L'heure de debut du travail est 07h30min,les employés pourront-t-ils arriver à l'heure au travail chaque matin ? **(1,5 pt)**