LYCEE TECHNIQUE D'EDEA					
Examen	**Epreuve**	**Coef.**	**Durée**	**Classe**	**Année Scolaire**
Evaluation 2	**Mathématiques**	**3**	**3h**	**T[le] IND**	**2022/2023**

EXERCICE 1 : 5 Points

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :
$P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

a) Calculer $P(2i)$ et conclure. **0,75pt**

b) Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :
$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$. **0,75pt**

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i = 0$. **1pt**

2. L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On donne les points $A(-1; 1; 0)$, $B(2; -1; 3)$ et $C(1; -1; 1)$. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(-2; 1; 3)$ et de rayon 4.

a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). **1pt**

b) Soit (P) le plan d'équation cartésienne $4x + 3y - 2z + 1 = 0$.
Montrer que $(S) \cap (P)$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon. **1,5pt**

EXERCICE 2 : 5 Points

1. Soient (U_n) et (V_n) les suites définies par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{5}U_n + 6 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.
et $V_n = U_n + \alpha$ où α est un nombre réel.

a) Déterminer le réel α pour que (V_n) soit une suite géométrique, puis exprimer V_n en fonction de n. **0,75pt**

b) Calculer en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1} + U_n$. **0,75pt**

c) On suppose que la suite (U_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$.
Déterminer le nombre réel l. **0,5pt**

2. Calculer les limites suivantes : **1,5pt**

$$\lim_{x \to -\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 3x + 1} \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{9x^2 + x + 5} - 3x; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}} .$$

3. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$. **1,5pt**

PROBLEME : 10 Points

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B.

Partie A : 7,5 Points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x^3+3x+3$. **1,5pt**

2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ telle que $\alpha\in]2;3[$. Dresser le tableau de signes de g. **1,25pt**

3. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, on a : $f'(x)=\dfrac{-2xg(x)}{(x^2-1)^2}$. **0,75pt**

4. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f. **1,5pt**

5. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=2x$ est asymptote à $\mathscr{C}$ et étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ). **1pt**

6. Montrer que $f(\alpha)=3\alpha$, puis construire la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que ses asymptotes. **1,5pt**

Partie B : 2,5 Points

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous est celle d'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$.

Les droites (D_1) et (D_2) sont des asymptotes à $(\mathcal{C})$.

1. Dresser le tableau de variations de h. **1pt**

2. Donner en justifiant les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}$. **1pt**

3. Donner en justifiant l'ensemble D de dérivabilité de h. **0,5pt**