



PROBATOIRE BLANC SESSION D'AVRIL N°02

Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES / 15 Points

EXERCICE 1 : 2 Points

Une urne contient quatre boules portant le numéro 1, trois boules portant le numéro -1 et six boules portant le numéro 0, toutes indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise trois boules de cette urne. On désigne par **a** le numéro porté par la première boule tirée, par **b** le numéro porté par la seconde boule tirée et par **c** le numéro porté par la troisième boule tirée.

- L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) d'équations respectives : $x + y - z = 0$ et $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z = 0$. Soit A le point de l'espace de coordonnées $(\mathbf{a} ; \mathbf{b} ; \mathbf{c})$.
 - Combien de tirages peut-on effectuer pour que le point A soit situé sur la droite (d) , intersection de (\mathcal{P}) et du plan (\mathcal{P}') d'équation : $x - y + 1 = 0$? **1pt**
 - Combien de tirages peut-on effectuer pour que les plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) soient perpendiculaires ? **0,5pt**
- On considère dans \mathbb{R} l'équation $(E) : \mathbf{a}\cos 2x + \mathbf{b}\sin 2x = \mathbf{c}$.
Combien de tirages peut-on effectuer pour que $\frac{\pi}{4}$ soit une solution de (E) ? **0,5pt**

EXERCICE 2 : 5,5 Points

- A)** Soit f un endomorphisme d'un plan vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$, qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, associe le vecteur $\vec{u}' = f(\vec{u}) = (-2x + y)\vec{i} + (4x - 2y)\vec{j}$.
- Donner la matrice M de f dans la base \mathcal{B} . **0,5pt**
 - f est-il un automorphisme ? justifier votre réponse. **0,5pt**
 - Déterminer le noyau de f , noté $\text{Ker } f$ et l'image de f , notée $\text{Im } f$. **1pt**
 - Soient $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{e}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$.
 - Montrer que $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de E . **0,25pt**
 - Déterminer la matrice M' de f dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$. **0,5pt**
- B)** L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(4; 2; 4)$, $B(0; 3; 2)$ et $C(0; 0; 3)$.
- Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) . **0,75pt**
 - Soit (\mathcal{P}) le plan d'équation cartésienne : $5x - 4y - 12z + 36 = 0$ et (S) l'ensemble

des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$.

- a)** Montrer que (S) est une sphère dont on précisera son centre Ω et son rayon R . **0,5pt**
b) Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de Ω sur (\mathcal{P}) . **0,75pt**
c) Montrer que (S) et (\mathcal{P}) sont sécants. **0,25pt**
d) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $(S) \cap (\mathcal{P})$. **0,5pt**

EXERCICE 3 : 4 Points

A) Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC tel que $AB = AC = 4 \text{ cm}$ et $Mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. Le point I est le milieu de $[BC]$ et $D = bar\{(A, -1); (B, 1); (C, 1)\}$.

1.a) Montrer que I est le milieu du segment $[AD]$, puis déduire que $ABDC$ est un carré de centre I . **0,5pt**

1.b) Déterminer et construire l'ensemble (\mathcal{C}) des points M du plan tels que $MA^2 - MD^2 = 16$. **0,75pt**

2. Soit t la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$ et r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer la droite (Δ) telle que $t = S_{(BD)} \circ S_{(\Delta)}$ et $r = S_{(\Delta)} \circ S_{(ID)}$. **0,5pt**

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $t \circ r$.

3. Soit h la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport k . **0,75pt**

B) Soient (U_n) et (V_n) les suites numériques définies par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{n+2}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
 et $V_n = U_n - n$.

1. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on caractérisera. **0,5pt**

2. Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n . **0,5pt**

3. Calculer en fonction de n , la somme $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$. **0,5pt**

EXERCICE 4 : 3,5 Points

Soit f une fonction numérique dont le tableau de variation de sa dérivée f' est donnée ci-contre :

1. Dresser le tableau de variations de f . **0,5pt**

2. On suppose que f est une fonction impaire de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

La courbe de f passe par le point $A(-1; -2)$.

a) Donner la valeur de $f(1)$. **0,25pt**

b) Déterminer les réels a, b, c et d . **1pt**

3. Soit g la fonction définie par : $g(x) = -x^3 + 3x$.

a) Dresser le tableau de variations de g . **0,75pt**

b) Construire la courbe (C_g) de la fonction g . **0,5pt**

c) Déduire dans le même repère la courbe de la fonction h telle que $h(x) = -g(x)$. **0,5pt**

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f'	$-\infty$	0	3	0	$-\infty$

Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES / 5 Points

Situation :

M. RAYEZ dispose d'une entreprise de fabrication des jouets. Cette entreprise fabrique chaque année x jouets. Le coût de production, exprimé en milliers de francs CFA est donné par : $C(x) = x^2 - 20x + 400$, avec $x > 0$. Pour réaliser un bénéfice, M. RAYEZ doit minimiser le coût unitaire de fabrication d'un jouet. La masse salariale de l'entreprise dépend de l'ancienneté des employés et est échelonnée en milliers de francs CFA comme suit :

Ancienneté (en années)	[0; 4[[4; 6[[6; 10[[10; 12[[12; 18[
Salaire	60	70	80	110	120

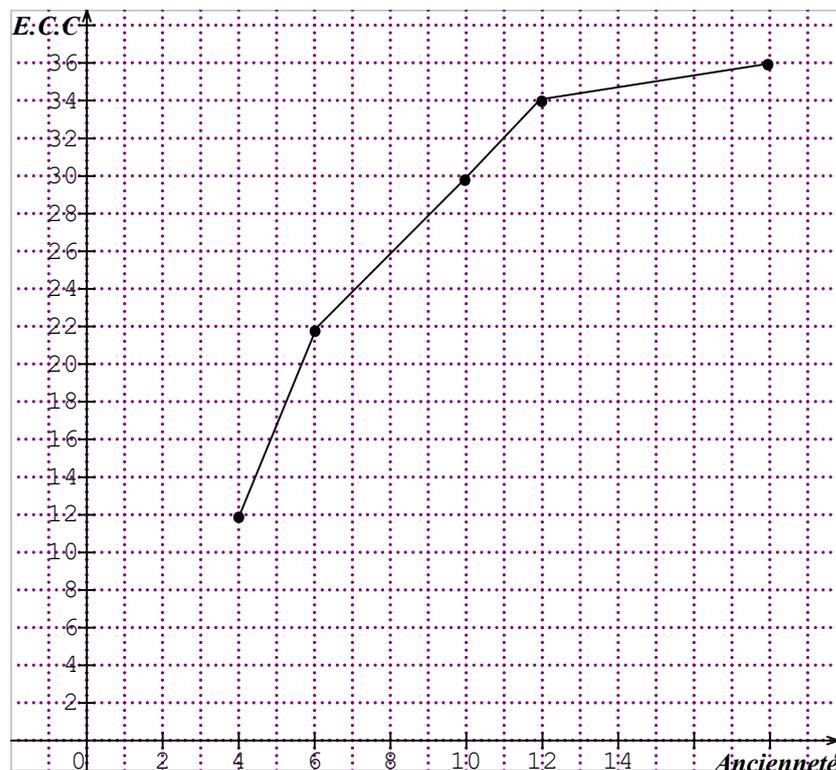
Une étude statistique a permis de dresser le polygone des effectifs cumulés croissants

ci-contre. Sa femme vient de mettre au monde une jolie fille. Pour cette fille qui vient de naître, M. RAYEZ dépose à la création de l'entreprise une somme de 20 000 FCFA dans un compte bancaire. Il décide de verser sur ce compte, à chaque anniversaire de sa fille 10 000 FCFA auxquels il ajoute mille fois l'âge de celle-ci en francs CFA.

Tâches :

1. Déterminer la quantité de jouets à fabriquer pour minimiser le coût unitaire moyen de fabrication d'un jouet. **1,5pt**
2. Quelle somme M. RAYEZ devra-t-il verser au 15^{ème} anniversaire de sa fille ? **1,5pt**
3. Quelle est la masse salariale de cette entreprise ? **1,5pt**

Présentation :



0,5pt