EPREUVE DE MATHEMATIQUE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (19points)

EXERCICE 1(8pt)

Les paries A et B sont indépendantes.

A. Soit les fonctions f et g définies sur $]-1;\ 1[$ par $f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x^2+1}}$ $et\ g(x)=f\left[-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$

1) Montrer que pour tout $x\,\epsilon\ ]-1;\ 1[\ ;g(x)=-1-\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. 0.5pt

2) Montrer que g réalise une bijection de $]-1;\ 1[\ vers\ un\ eintervalle\ J\ a$ déterminer. 1pt

3) Expliciter la bijection réciproque g^{-1}. 0.75pt

4) Montrer que la bijection réciproque g^{-1}de g est dérivable sue IR. Et que pour tout réel x, $(g^{-1})'=\frac{2}{\pi[1+(x+1)^2]}$. 1pt

B. Soit n un entier naturel non nul. Soit f_n une fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x)=1-\frac{x}{2}-x^n$

1) Montrer que f_n réalise une bijection 0.75pt

2) En déduire qu'il existe un unique $x_n\,\epsilon[0;1]$ telle que $f_n(x)=0$. 0.75pt

3) Montrer que pour tout n $\epsilon\ \mathbb{N}^*$; $f_{n+1}(x_n)>0$. 0.75pt

4) En déduire que la suite (x_n) est croissante et qu'elle converge. 1.25pt

5) On suppose qu'il existe un réel β tel que pour tout n $\epsilon\ \mathbb{N}^*$: $0\le x_n\le\beta<1$.
Calculer $\lim_{x\to+\infty}x_n^n$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty}x_n=1$ 1.25pt

EXERCICE 2(5pt)

I) On considère le polynôme $p(x)=4x^3+x^2+x-3$

a) Démontrer que l'équation $p(x)=0$ admet une unique solution a ∈ℝ et que $0<a<1$ 0.5pt

b) On suppose que a est une racine rationnelle de la forme $\frac{p}{q}$ où pet q sont deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que p divise 3et q divise 4 1pt

c)Déterminer alors la solution rationnelle a de l'équation $p(x)=0$. 1.5pt

II) a) Soit N un entier relatif impair. Montrer que $N^2\equiv1[8]$. 0.5pt

b) Montrer que si un entier relatif M est tel que $M^2\equiv1[8]$, alors M est impair.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2=8y+1$. 0.75pt

d) En déduire que la parabole (τ) d'équation $y=\frac{x^2-1}{8}$ dans le repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan P passe par une infinité de points a coordonnées entiers. 0.75pt

EXERCICE 3(4.25pts)

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $(o;\ \vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$Soient les points A (3;–2;2); B (6;1;5); C(6;–2;–1) et D(0;4;–1)

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. 0.5pt

2. a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A 0.5pt

b) Ecrire une équation cartésienne du plan (P1) orthogonal à la droite (AC), passant par A. 0.5

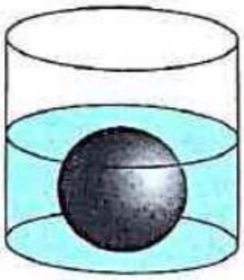
c) Vérifier que le plan (P2) d'équation $\boldsymbol{x+y+z-3=0}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A. 075pt

4. Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon $r = 5\sqrt{3}$. 0.75pt

5. a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ .En déduire que la droite (AD) est orthogonal au plan (ABC) 1.25pt

b) Calculer le volume v du tétraèdre ABCD. 0.75pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 6pts



Un industriel retrouve en stock un nombre (entre 75 et 350) inconnu de boules sphériques et identiques de rayon commun et inconnu. Son employé lui dit que s'il forme des tas identiques de 5 boules, il en reste un isolé. Tandis que s'il forme des tas identiques de 8 boules, il en restera 6 à part. Pour déterminer le rayon inconnu d'une de ces boules métalliques, un ingénieur de cette société prend un récipient cylindrique de rayon 12 cm et contenant de l'eau à une hauteur de 5cm, en fait au tiers de sa hauteur. On immerge donc une de ces boules métalliques dans ce récipient sans que l'eau ne se verse et on constate que la surface de l'eau est parfaitement tangente à la boule. L'industriel se demande si la hauteur d'air dans le cylindre, de la surface tangente à la boule jusqu'au bord du cylindre, est linéairement dépendante du rayon de la boule immergée.

L'industriel fait appel à vos compétences pour l'aider dans les tâches suivantes:

1) Quel est le rayon d'une de ces boules métalliques à 0,1 mm près ? 2pt
2) Quel est ou sont le(s) nombre(s) possibles de boule(s) retrouvée(s) en stock ? 2pt
3) Peut-on dire que la hauteur d'air dans le cylindre, de la surface tangente à la boule jusqu'au bord du cylindre, est linéairement dépendante du rayon de la boule immergée ?