Lycée de Bahouan **Devoir N° 2**
Département de Mathématiques **Tle C.**
Année scolaire 2022-2023 **Durée : 4h**

Epreuve de Mathématiques. Novembre 2022 (20pts) Coef : 7
Présentation : 0.5pt
Evaluation des ressources

Exercice 1(2pts)

1. Déterminer l'ensemble des entiers a et b tels que $PGCD(a;b)+PPCM(a;b)=a+b$. (0.25pt)
2. Montrer le théorème de Gauss : « si a divise bc, a et b premier entre eux alors a divise c » . (0.25pt)
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ $7x-11y=3$. (0.5pt)
4. Soit z un complexe tel que $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$. (0.5pt)
5. Soit l la fonction définie par $l(x)=\frac{1}{1-ax}$ où a est un réel. On suppose l est n fois dérivable, n étant un entier naturel. Démontrer par récurrence que $l^n(x)=\frac{a^n n!}{(1-ax)^{n+1}}$. (0.5pt)

Exercice 2 (6pts)

1. Démontrer que pour tout réel $x\in[0;1]$ on a : $1+\frac{\sqrt{2}}{4}x\leq\sqrt{1+x}\leq 1+\frac{x}{2}$. (0,5pt)
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x+\sqrt{|x^2-1|}$
   a) Etudier la continuité de h en $x_0=-1$. (0.25pt)
   b) Etudier la dérivabilité de h aux points d'abscisses $x_0=-1$ et $x_1=1$. (0.75pt)
   c) Etudier les branches infinies. On déterminera les asymptotes. (0.75pt)
   d) Dresser le tableau de variation de h. (1pt)
3. Soit p la fonction définie $[0;\pi]$ vers $\mathbb{R}$ définie par $p(x)=\frac{1}{\tan x}$
   a) Démontrer que p admet une fonction réciproque p^{-1}. (0,5pt)
   b) Dresser le tableau de variation de p. (0.25pt)
   c) Exprimer $p'(x)$ en fonction de p, puis montrer que $p''(x)=2p^3(x)+2p(x)$ et déduire l'abscisse du point d'inflexion. (0.75pt)
   d) Construire la courbe de p et de p^{-1} dans le même repère (0.75pt)
   e) Montrer que $(p^{-1}(x))'=\frac{-1}{x^2+1}$. (0,5pt)

Exercice 3 (3pts)

Le plan est muni du repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-2x^3-3x^2+2$.
   a. Etudier rapidement les variations de g et dresser son tableau de variation. (0.75pt)
   b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près. (0.5pt)
   c. Déduire le signe de g suivant les valeurs de x. (0.25pt)
2. Montrer que g est bijective sur $[0,+\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera. (0.5pt)
3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x)=\frac{-x^3+2x}{x+1}$
   a. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée f'. (0.5pt)
   b. Déduire de la question 1, le tableau de variations de f. (0.5pt)

Exercice 4 (4.5pts)

Soit $B=\{\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ par : $\vec{a}(2;2;1)$, $\vec{b}(1;1;0)$ et $\vec{c}(0;1;-1)$. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout point $M(x;y;z)$ associe le point $M'(x';y';z')$ tel que

$$\begin{cases} x' &= 6x-4y-4z \\ y' &= 5x-3y-4z. \\ z' &= x-y \end{cases}$$

1. Vérifier si la famille $B' = \{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ est libre puis déduire si elle forme une base de $\mathbb{R}^3$. (0.5pt)
2. Soit $F = \{\vec{u}(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \; tel \; que \; x - y - z = 0\}$. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base. (0.5pt)
3. Soit $H = \{\vec{u}(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \; tel \; que \; g(\vec{u}) = 2\vec{u}\}$. Montrer que H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (0.5pt)
4. Déterminer la matrice de g. (0.25pt)
5.
   a) Déterminer le noyau de g, une base de ce noyau puis déduire sa dimension. (0.75pt)
   b) Déterminer l'image de g. (0.25pt)
   c) L'endomorphisme g est il bijectif ? (0.25pt)
   d) Déterminer la matrice de $g \circ g$. (0.5pt)
6. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x; y) = (2x - y)u_1 + (x + y)u_2$ dans une base $(u_1; u_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
   a) Montrer que f est linéaire. (0.5pt)
   b) Montrer que f est bijective et déterminer la matrice de sa bijection réciproque. (0.5pt)

Evaluation des compétences (4.5pts)

L'évolution du chiffre d'affaire d'une entreprise en fonction du numéro de l'année est regroupée dans le tableau ci-dessous

Années	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Numéro des années	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaire	2,4	3,8	4,1	5	5,2	5,6

Cette entreprise désir prévoir son chiffre d'affaire pour les années avenir par la méthode des moindres carrés.

M Maïgari, premier actionnaire de l'entreprise approvisionne l'entreprise tous les 35 jours. M Tsendou deuxième actionnaire arrive à l'entreprise tous les 27 jours. Le directeur reçoit M Tsendou deux jours après avoir reçu M Maïgari. Il souhaite les recevoir le même jour pour une réunion sans perturber leur périodicité.

On définit sur le plan du site de l'entreprise un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On définit également l'application f qui transforme tout point $M(x, y)$ du cercle unité centré en O, en un point $M'(x', y')$ tel que $z' = \frac{z+3-4i}{z}$ où i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$ et $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$. Le site de l'entreprise est délimité par l'ensemble des points M'.

Tache 1

Donner une estimation du chiffre d'affaire de cette entreprise en 2025. (1.5pt)

Tache 2

Déterminer le nombre de jours que devra attendre le directeur pour recevoir ses deux actionnaires. (1.5pt)

Tache 3

Déterminer et représenter le site de l'entreprise dans le repère. On montrera que $|z' - 1| = |3 - 4i|$ (1.5pt)

Grille d'évaluation

	Production	Interprétation correcte de la situation. (0.5pt)	Utilisation correcte des outils : (0.5pt)	Cohérence (0.5pt)
Tache 1				
Tâche 2				
Tâche 3				