

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

NB : la clarté, la lisibilité et toutes les étapes de calculs seront prises en compte. L'épreuve est numérotée sur deux pages

A. EVALUATIONS DES RESSOURCES : [15,5pts]

EXERCICE 1 : [03,5pts]

On considère dans l'espace un cube $OABCDEFG$. On oriente l'espace par le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$. Soit a un réel strictement positif et h l'homothétie de centre O et de rapport a . on note $M = h(A)$ et $L = h(C)$

1- Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$. En déduire l'aire du triangle DLM [0,75pt]

2- Soit I le milieu de $[ML]$. Déterminer l'ensemble des points I lorsque a varie [0,5pt]

3- Soit K l'image de F par l'homothétie de centre B et de rapport a . montrer que (OK) est perpendiculaire au plan (DML) [0,5pt]

4- Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (DML)

a- Démontrer que : $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$

b- Montrer que $\overrightarrow{OH} = \frac{a}{a^2+2} \overrightarrow{OK}$ [0,5pt]

c- Montrer que $HK = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$ [0,5pt]

5- Déterminer le volume du tétraèdre $DLMK$ en fonction de a [0,75pt]

EXERCICE 2 : [05pts]

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i, z_B = 3 + 2i$ et $z_C = 1 + 6i$. f et g des transformations qui ont pour écriture respective $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $z' = 3z - 2i$

1- Déterminer l'affixe du point E antécédant du point A par g [0,5pt]

2- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f [0,75pt]

3- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g [0,5pt]

4- h est la composée des transformations du plan g et f ($h = g \circ f$)

a- Déterminer l'écriture complexe de la transformation h [0,5pt]

b- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h [0,75pt]

5- (D) est la droite d'équation $2x - y + 1 = 0$ et (D') son image la transformation g

a- Déterminer l'expression analytique de g [0,5pt]

b- Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') [0,75pt]

6- Soit s la similitude directe qui transforme C en B et qui a pour point invariant A . donner l'écriture complexe de s [0,75pt]

EXERCICE 3 : [02,5pts]

1- On considère l'expression suivante : $S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$

a- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n}{n+1}$ [0,75pt]

b- Donner la valeur exacte de : $A = \frac{1}{9 \times 10} + \frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \dots + \frac{1}{29 \times 30}$ [0,5pt]

2- Pour tout entier naturel non nul, on pose $T_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)^3$

a- Démontrer par récurrence que $T_n = 2n^4 - n^2$ [0,5pt]

b- Déterminer l'entier n , tel que $T_n = 29161$

[0,75pt]

PROBLEME : [05pts]

PARTIE A : [02pts]

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -4x^3 + 6x^2 + 2$

1- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation [1pt]

2- Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1,6 < \alpha < 1,7$ [0,5pt]

3- Déterminer suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} [0,5pt]

PARTIE B : [03pts]

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{4-4x}{1+x^3}$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. L'unité graphique est 2cm

1- Calculer les limites de f sur son D_f . interpréter graphiquement les résultats [0,75pt]

2- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-2g(x)}{(1+x^3)^2}$ [0,5pt]

3- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation [0,75pt]

4- Construire (C_f) [1pt]

B-EVALUATIONS DES COMPETENCES : [04,5pts]

L'entreprise ABEGA et FILS voudrait savoir s'il est possible de faire une estimation de son chiffre d'affaire en 2021 si sa dépense mensuelle est de 300 millions. Pour cela elle a fait appel à un cabinet pour une expertise. En 2020 le bureau d'enquête de ce cabinet a relevé en dizaine de millions de francs CFA les dépenses ainsi que les chiffres d'affaires mensuels de cette entreprise. Il a consigné les données dans le tableau suivant :

Dépenses (x_i)	12	17	11	13	31	20
Chiffres d'affaires (y_i)	99	130	92	108	232	150

Mr Ebané directeur de l'entreprise ABEGA et FILS est propriétaire d'un terrain dans la ville de Mfou. Pour préparer sa retraite, il décide transformer une partie de ce terrain en un site touristique. Il fait appel à un entrepreneur pour l'étude du site. L'entrepreneur fait comprendre à Mr Ebané que dans le repère des services du cadastre de la ville de Mfou où l'unité est le mètre, la zone utilisable pour le site est délimitée par l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $70 \leq |2i\bar{z} + 2 - 3i| \leq 80$ où $z = x + iy$ est la forme algébrique du nombre complexe. L'entrepreneur demande à Mr Ebané une somme de 5000 Fcfa par mètre carré de terrain du site. Et Mr Ebané dispose d'une somme de 5 500 000 FCFA pour l'aménagement du site. Pour le suivi des recettes de sa ferme, Mr Ebané a fait appel à l'expertise d'un bureau d'études. Des études faites ont permis d'établir que la recette $R(x)$ (en millions de francs de CFA), résultant de la vente de x centaines de kilogrammes de cacao, est définie sur $[1; 5]$ par $R(x) = 17x$. Mr Ebané vend son cacao à son client principal, au coût $C(x) = x(-x^2 + 29) - 16$ (en millions). Le bénéfice de son client principal pour x centaines de kilogrammes de cacao vendus est $B(x) = R(x) - C(x)$ défini sur $[1; 5]$. Le fournisseur requiert votre expertise pour savoir s'il existe au moins un x_0 dans $[1; 5]$ tel que le bénéfice soit égale à 81 millions de francs CFA.

TACHES :

1- Le cabinet d'expertise pourra-t-il faire une bonne estimation du chiffre d'affaire de l'entreprise ? Si oui quelle l'estimation de ce chiffre d'affaire ? [1,5pts]

2- Monsieur Ebané pourra-t-il réaliser son projet de site touristique ? [1,5pts]

3- Lorsque des x_0 existent, quels sont leur(s) encadrement(s) à 10^{-1} près ? [1,5pts]