

Epreuve de Mathématiques

Compétences évaluées : Arithmétiques, produit vectoriel, nombres complexes

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES / 15,5 points

EXERCICE 1 / 5,5 points

Les questions 1, 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes.

- On considère deux entiers naturels non nuls a et b tels que : $a + b = 23$.
 - Montrer que a et b sont premiers entre eux. **0,5pt**
 - En déduire a et b sachant que $a < b$ et $PPCM(a, b) = 126$. **1pt**
- Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $9x - 14y = 0$. **1pt**
 - Résoudre dans \mathbb{Z} le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 4[9] \\ x \equiv 5[14] \end{cases}$. **0,5pt**
- Déterminer les entiers relatifs n tels que $\frac{n(5n+8)}{2n-1}$ soit un entier relatif. **1pt**
- Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation : $x^2 - 3x + 6 \equiv 5[7]$. **0,5pt**
- Déterminer le chiffre des unités du nombre $A = (3548)^9 \times (2537)^{37}$. **1pt**

EXERCICE 2 / 2 points

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit u , un nombre complexe tel que $|u| = 1$, $u \neq 1$ et z un nombre complexe quelconque.

- Montrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ est un nombre réel. **1pt**
- On considère les nombres complexes $z_1 = \frac{3+2i}{-5+7i}$ et $z_2 = \frac{3-2i}{5+7i}$. Démontrer sans calcul que $z_1 - z_2$ est un réel et que $z_1 + z_2$ est un imaginaire pur. **1pt**

EXERCICE 3 / 4,5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1; 0; 1)$, $B(2; 2; 4)$, $C(1; -1; 0)$ et $D(2; 1; -1)$.

- Montrer que les points A, B et C définissent un plan (P) dont on déterminera une équation. **1pt**
- Démontrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires. **0,5pt**
- Calculer l'aire du triangle ABC, puis le volume du tétraèdre ABCD. **1pt**
- Déterminer les réels a, b et c tels que le point O soit le barycentre des points pondérés (A, a) ; (B, b) et (C, c) . **0,75pt**
- Soit (Ψ) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $4MA^2 - MB^2 - 2MC^2 = -16$.
 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Ψ) . **0,75pt**
 - Démontrer que l'intersection de (Ψ) et (P) est un cercle dont on précisera les éléments caractéristiques. **0,5pt**

EXERCICE 4 / 3,5 points

I-/ Soit à résoudre dans \mathbb{N}^2 l'équation (E): $15x^2 - 7y^2 = 9$.

1. Démontrer que dans le système decimal, le dernier chiffre d'un carré est 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.
2. En déduire que $7y^2 + 9$ n'est pas divisible par 5. **0,5pt**
3. Résoudre alors l'équation (E) dans \mathbb{N}^2 . **0,5pt**

II-/ Soit le nombre $a_n = 3^{2n} - 1$, tout entier naturel non nul n .

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , a_n est divisible par 8. **0,5pt**
2. On considère l'équation (E) : $a_3x + a_2y = 3296$.
 - i) Montrer qu'il existe un couple d'entiers solution de (E) **0,5pt**
 - ii) Résoudre (E) dans \mathbb{Z}^2 . **1pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES / 4,5 points

La base du BIR de Maroua a défini son procédé de codage des données de la façon suivante :

Etape 1 : à la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre n correspondant dans le tableau.

Etape 2 : on calcule le reste de la division euclidienne de $9n + 5$ par 26 et on le note r .

Etape 3 : au nombre r , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Cette base du BIR est composée de régiments et chaque régiment a un certain nombre identique de soldat. Lorsque 11 régiments se retrouve pour le repas, il y'a 7 salles occupées et 5 soldats qui n'ont pas de places. Un des soldats, **M. BRAVO** content de la réussite au baccalauréat série C de son fils, lui a promis comme cadeau un voyage pour Yaoundé pour suivre la rencontre d'un match de football au stade Olembé. Une fois à l'agence, le caissier leur dit : « *le prix d'un billet de voyage pour Yaoundé est le produit xyz en base 10, où x est solution de l'équation $x + y + z = 50$ avec $y = \overline{131}^x$ et $z = \overline{101}^x$ ($x > 3$)* ». pour cela, il demande à **M. BRAVO** d'écrire d'abord le produit xyz en base x avant de trouver le prix d'achat de leurs billets de voyage.

Tache 1 : Quel est le noms de code utilisé par le commandant de cette base militaire pour le mot SOLDAT ? **1,5pt**

Tache 2 : quel est le nombre maximal de soldats par régiment, sachant qu'un régiment a moins de 300 soldats ? **1,5pt**

Tache 3 : Quel montant doivent-ils déboursier à l'agence pour se rendre à Yaoundé ? **1,5pt**

« *Travaillez de manière à remporter le prix* »

Examineur : M. NGANSOB NONO Yves. B (PLEG_Maths)