

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Partie A : Evaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 : 4points

- I. On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $z_{n+1} = iz_n + 2i$.
- Déterminer la forme algébrique de z_1 et de z_2 . **1pt**
 - On considère le nombre complexe $z_A = -1 + i$ et la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.
 - Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = iu_n$. **0,5pt**
 - Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n = (1 - i) \times i^n$ et déduire z_n en fonction de n . **1pt**
 - Déterminer la forme algébrique de z_{2022} . **0,5pt**
- II. Pour tout nombre réel $\theta \in [0, \pi]$, on considère l'équation $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$.
- Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'équation admet une solution réelle. **0,5pt**
 - Dans les autres cas, exprimer les solutions complexes en fonction de θ . **0,5pt**

Exercice 2 : 6points

- I. Soit la suite (a_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \frac{4^{2n+1} + 1}{5}$.
- Calculer a_2 et a_3 . **0,5pt**
 - Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $a_{n+1} = 16a_n - 3$. **0,75pt**
 - Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $a_n \in \mathbb{N}$. **0,75pt**
 - On note $d_n = \text{pgcd}(a_n, a_{n+1})$. Montrer que $d_n \in \{1; 3\}$. **0,5pt**
 - Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $a_{n+1} \equiv a_n[3]$. **0,5pt**
 - Vérifier que $a_0 \equiv 1[3]$ et déduire que pour tout n de \mathbb{N} , a_n n'est pas divisible par 3. **0,5pt**
 - Déduire la valeur de d_n . **0,5pt**
- II.1.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Quels sont les restes de la division euclidienne de 4^n par 7 ? **0,5pt**
 - En déduire le reste de 2020^{2019} dans la division euclidienne par 7. **0,5pt**
2. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 3 et par 8 et en déduire qu'il est divisible par 24. **1pt**

Exercice 3 : 5points

Soit l'équation (E) : $2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 4 = \pi\sqrt{x}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de (E).

- On pose pour tout $x > 0$, $g(x) = x\sqrt{x} - 1$.

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera. **0,5pt**

b) Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x > 0$. **1pt**

2. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{\sqrt{x}}$.

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. **1pt**

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$. **0,5pt**

c) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation. **1pt**

3.a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $f(x) = \pi$, pour $x \neq 0$. **0,5pt**

b) Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E). **0,5pt**

Partie B : Evaluation des compétences (4,5 points)

Une équipe d'ingénieurs désignée pour construire 3 forages dans un village a assimilé le village à un repère ainsi qu'indique la figure ci-contre. Après étude pour savoir les coordonnées des points des trois forages, les ingénieurs ont réalisé que l'un des forages sera situé sur l'axe reliant la préfecture et le Lycée ; et que les affixes de ces points sont solutions de l'équation (E): $z^3 + (-4-8i)z^2 + (-15+22i)z + 30 = 0$. Pour aspirer la boue, l'équipe d'ingénieurs utilise des tubes en métal vendus dans des boîtes de rangements par 5 et par 9. L'ingénieur en chef constate que s'il ne prend que des rangements par 5, il lui restera 3 tubes ; et s'il ne prend que des rangements par 9, il lui restera 2 tubes. Et fini par obtenir une quantité de tubes comprise entre 100 et 140.

Pour fêter l'arrivée du forage dans son voisinage, un habitant du village dispose de 10 000 F CFA pour l'achat des bières qui coûtent 350 FCFA chacune et des jus qui coutent 200 FCFA chacun. Il doit dépenser la totalité de cette somme d'argent pour l'achat de ces deux types de boissons. Avec la présence de son voisin qui ne boit que de la bière et de sa femme qui ne boit que du jus, chaque participant a droit à une seule bouteille.

Taches :

1. Déterminer les nombres possibles des bouteilles de bières et de jus qu'il peut acheter **(1,5pt)**

2. Déterminer par leurs coordonnées les positions des trois forages. **(1,5pt)**

3. Combien l'équipe d'ingénieurs a-t-elle commandé de tubes ? **(1,5pt)**

Présentation : 0,5pt

