COLLÈGE INSTITUT FOTSO		**Année scolaire 2021-2022**
Département de Mathématiques	**CONTROLE**	**Séquence N°5** **Date : AVRIL 2022**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : **Tle C** Durée : **04 heures** Coef: 7

Examinateur: NKANA NDJOOH SEPPO FRANCOIS

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 POINTS

Exercice 2 : Espaces vectoriels et applications linéaires (4pts)

E est un espace vectoriel sur IR dont une base est B=$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ associe le vecteur $f(\vec{u}) = (x+2y)\vec{i} + (-y+z)\vec{j} - (x+2z)\vec{k}$

1) Déterminer la matrice de f dans la base B . **0,5pt**

2) a) Déterminer le noyau de f . (On donner une base du noyau) **0,75pt**

   b) Sans déterminer Imf , en déduire la dimension de Imf. **0,25pt**

   c) Déterminer Imf et une base de Imf. **0,75pt**

3) Déterminer la matrice de fof dans la base B. **0,5pt**

4) On considère les vecteurs $\vec{e_1} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{e_2} = \vec{i} - \vec{k}$ et $\vec{e_3} = \vec{j} - 2\vec{k}$

   a) Démontrer que la famille B'= $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ est une base de E. **0,5pt**

   b) Déterminer la matrice de f dans la base B' . **0,75pt**

Exercice 2 : 4 points

Un dé cubique pipé est tel que :
deux faces sont marquées 2 ; trois faces sont marquées 4, et une face marquée 6.
La probabilité p_i d'apparition de la face i est proportionnelle au nombre i.

1° Calculer les nombres p_2, p_4, p_6. [1.5pt]

2° On suppose dans la suite que :

On lance deux fois de suite le dé précédent, on note i, le résultat du premier lancer et j le résultat du deuxième lancer. On définit la variable aléatoire X qui au couple $(i;\ j)$ associe le nombre $i - j$.

a) Déterminer l'univers-image de X. [1pt]

b) Déterminer la loi de probabilité de X. [1,5pt]

EXERCICE 3 : 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x cosx$.

1. Montrer que pour tout réel x, $-e^x \leq f(x) \leq e^x$ et en déduire que la courbe représentative (Cf) de f admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. *[0.25pt]*

2. Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. (On justifiera que f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$) *[0.75 pt]*

3. Représenter (Cf) sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, on prendra $\|\vec{i}\| = 0{,}25\pi$ et $\|j\| = 2cm$ *[0.75 pt]*

4. On pose $I_n = \int_0^{\pi} e^x cosnx dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout n de $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que sin$(n\pi)$=0 *[0.5 pt]*

b) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{1+n^2}$. *[1 pt]*

c) Montrer que : $|I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$ et en déduire la limite de la suite (I_n) *[0.5pt]*

5. Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y - 1 = 0$ et
(E') l'équation $y' - 2y = 1 - e^{x} sinx$, où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Dire en justifiant , si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a) Si g est une fonction positive et si g est solution de (E) alors g est croissante sur $\mathbb{R}$. *[0.25 pt]*

b) La fonction $x \mapsto 3e^{2x} + \frac{1}{2}$ est une solution de (E). *[0.25 pt]*

c) La primitive F de f qui s'annule en 0 est solution de (E'). *[0.75 pt]*

.

<u>EXERCICE 4 :</u> 2,5 points

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2cm. M est le point d'affixe z , (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que

$|z - 1 - i| = \frac{1}{4} |z + i\bar{z} - 8(1 + i)|$, (D) est la droite

d'équation $x + y - 8 = 0$ et F le point de coordonnées (1 ;1) **1.** Soit M' le projeté orthogonal de M sur la droite (D).

1. Montrer que l'affixe z' de M' est :

$$z' = \frac{1}{2}(z - i\bar{z} + 8(1 + i))$$

2. Calculer $z' - z$.

3.a) En déduire que (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que MM' = 2MF

.

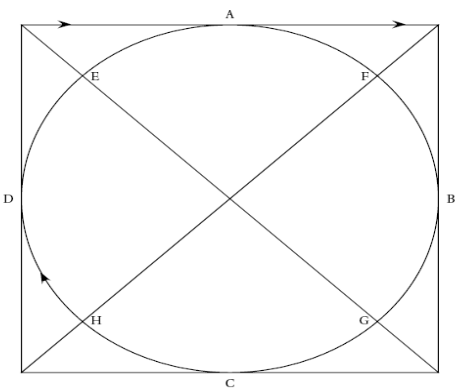
b) En déduire que (Γ) est une ellipse dont on précisera le foyer et la directrice.

c) Préciser l'axe focal .

d) Vérifier que les points A(2, 2) et A'(−2, −2) sont deux sommets de (Γ) .

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES — 04,5 POINTS

Une population de microbes se développe dans une culture suivant une loi où à chaque instant le taux d'accroissement est proportionnel à l'effectif.



Cette population vie à coté d'une salle de fete comme l'indique la figure ci-contre Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle.

Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.

Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.

À l'instant t = 0, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon.

1- quelle est l'effectif initial de cette culture ? 2.25pts

2- On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon.

À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ? 2.25pts