Année scolaire 2022-2023

Classe : Tle CDTi
Devoir No : **3**
Durée : **4h**

03 décembre 2022

DEVOIR DE MATHEMATIQUES (coef 07 en C, 4 en D et Ti)

➔ ***La qualité combinée du raisonnement et de la rédaction seront des facteurs clés de cette évaluation.***

Exercice No 1 : 4 pts série C exclusivement (source : collègue)

I- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1) : $z^2 - 2z.cos(\alpha) + 1 = 0$ où α est un paramètre réel (z est l'inconnue). (0,25pt)

2) Donner la forme trigonométrique des solutions de l'équation (E_n): $z^{2n} - 2z^n cos(\alpha) + 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$. (0,5pt)

II- Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n cos(\alpha) + 1$

1) Montrer que $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)z + 1\right]$ (0,50pt)

2) a- Calculer $P_\alpha(1)$ (0,25pt)

b- En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1} sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$ (0,5pt)

3) pour tout $\alpha \in]0\,;\pi[$ et pour tout entier naturel n ≥ 2, on pose :

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Montrer que $2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$. (0,50pt)

III- Posons $V_n(\alpha) = 2^{n-1}H_n(\alpha)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

a- Calculer $\lim_{\alpha\to 0} V_n(\alpha)$, $a_n = \lim_{\alpha\to 0} H_n(\alpha)$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n$ (**NB** : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{b^n} = 0$ si $b > 1$) (0,75pt)

b- Montrer à l'aide du théorème des accroissement finis que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$. (0,25pt)

c- En déduire, en revenant à la définition, que $\lim_{n\to+\infty} \sin(\frac{\alpha}{2n}) = 0$. (0,5pt)

Exercice No 2 : 03 pts en séries C-D-Ti (source : GPM)

Soit f la fonction numérique définie sur $D =]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Montrer que la dérivée de f garde un signe constant sur D. **0,25pt**
2) Dresser le tableau de variation de f. **0,25pt**
3) Etudier le comportement de f à l'infini. **0,25pt**
4) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle$[1\,;2]$. **0,25pt**
5)
a) Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle D vers un intervalle J à déterminer. **0,25pt**
b) Dresser le tableau de variations de f^{-1}. **0,25pt**
6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation : $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$ **0,25pt**
7) On appelle g la fonction définie sur D par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
a) Montrer que si x est élément de $[1\,;2]$, alors $g(x)$ appartient aussi à $[1\,;2]$ **0,25pt**
b) calculer la dérivée g' de g et montrer que, pour tout $x \in [1;2]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ **0,25pt**

c) En déduire que, pour tout $x \in [1;2]$: $|g(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$ **0,25pt**

d) On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

- Montrer que $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ et $|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ **0,25pt**
- En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$. **0,25pt**

<u>Exercice No 3</u> : 3 pts [barème visible divisé par 2] en C et 6 pts [barème visible] en D-Ti (source : GPM).

Soit f la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{\sqrt{sin2x}}{sinx}$.

1-a) Montrer que f est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. $\mathbf{0,5\ pt}$

b) Étudier la dérivabilité de f en $\frac{\pi}{2}$. f est-elle continue en $\frac{\pi}{2}$? $\mathbf{0,5\ pt}$

c) Étudier les variations de f. $\mathbf{0,5\ pt}$

2- Montrer que f est une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J à déterminer. $\mathbf{0,5\ pt}$

3- Soit g la bijection réciproque de f.

a) Préciser les domaines de continuité et de dérivabilité de g. $\mathbf{0,5\ pt}$

b) Montrer que pour $x > 0$, $g'(x) = \frac{-4x}{4+x^4}$. $\mathbf{0,5\ pt}$

4- Soit $\varphi(x) = g(\sqrt{2x}) + g\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $]0;+\infty[$. $\mathbf{0,5\ pt}$

b) Montrer que pour $x > 0$, $\varphi'(x) = 0$. Que vaut alors $\varphi(1)$? $\mathbf{0,5\ pt}$

c) Calculer $\varphi(x)$ pour $x > 0$. $\mathbf{0,5\ pt}$

<u>N.B</u> : On rappelle que : $\sin(a-b) = sina \times cosb - cosa \times\ sinb$ et $\lim_{X\to 0}\frac{sinX}{X} = 1$

5- Etudier la fonction $f(x) = xln(x) - x+1$ $\mathbf{0,5\ pt}$

6- Considérons la primitive F de la fonction f définie sur $]0:+\infty[$ par f$(x) = \frac{1}{x}$ telle que F(1) = 0.

6a) Justifier l'existence de F. $\mathbf{0,25\ pt}$

6b) Montrer que pour tout paramètre $y > 0$, la fonction G définie sur $]0:+\infty[$ par

$$\mathrm{G}(x) = F(y.x) - F(y) - F(x),$$

est constante. $\mathbf{0,25\ pt}$

6b) Calculer G(1) et prouver que pour $x, y > 0$, $F(y.x) = F(y) + F(x)$. $\mathbf{0,5\ pt}$

<u>Exercice No 4</u> : 5 pts en C / 5,5pts-D-Ti (source : collègue)

I. On considère le polynôme P de degré 3 défini par : $P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i$.

1. a- Déterminer les nombres complexes $a\ et\ b$ tels que : $P(z) = (z-2i)(z^2+az+b)$. **0,75pt**

b- Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **0,75pt**

II. Dans le plan complexe $(0, I, J)$ *direct*, on donne les points A, B, C, E et G dont les affixes respectives sont: $Z_A = 3$, $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$, $Z_C = -1$, $Z_E = 7$ et $Z_G = 11 + 4i\sqrt{3}$.

1. On pose : $X = \frac{Z_B - Z_I}{Z_A - Z_I}$. Calculer $|X|$ et déterminer un argument de X . **0,5pt× 2**

2. En déduire la nature exacte du triangle AIB. **0,5pt**

3. On pose : $\varphi = \frac{z_G - z_C}{z_B - z_C}$. Mettez φ sous forme algébrique puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu. **1pt-C/1,5pt-D**

4- Déterminer l'affixe du point F de l'axe des abscisses pour lequel le triangle EFG est équilatéral. **1pt**

<u>Evaluation des compétences</u> (05 pts-C / 05,5pts-D_Ti) ***Source, Collègue*** **L. Soa [01,5pt -> 18 minutes]**

Monsieur POUGA est un agriculteur qui possède une plantation de cacao. Il a relevé que sa production (en Kg), après chaque saison de récolte depuis 2014 (année de rang 1), forme une série statistique à deux variables comme l'indique le tableau ci-contre :

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Production y_i $(en\ Kg)$	94	219	751	2252	4573	6714	8157

Il voudrait avoir une estimation « aux moindres carrées » (*termes employés par son banquier qui suit sa production pour renforcer en prêt l'équipement de son exploitation*) de sa production en 2021 en supposant que la tendance des récoltes reste la même au cours du temps. Pour cela il fait appel à son fils de la classe de terminale afin de l'aider. Dans sa démarche, son fils constate que le nuage de points associé à cette série ne laisse pas entrevoir un ajustement linéaire et après plusieurs calculs, il décide donc de poser $y'_i = \sqrt{y_i}$ et constate que le nuage de points de la nouvelle série $(x_i; y'_i)$ laisse entrevoir un ajustement linéaire.

Bien avant, **en 2012**, monsieur POUGA avait récolté son cacao et avait entreposé sa récolte dans une réserve ayant la forme d'un cube ABCDEFG de côte 1 dam, muni d'un repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ et avait constaté que le cacao occupait un volume ayant la forme d'un tétraèdre ABIG où I est le milieu du segment $[EF]$. Le prix d'un sac de cacao de 100 L coûtait 120 00 $FCFA$ à cette époque.

Pour le suivi des recettes de sa ferme, monsieur POUGA ai fait appel à l'expertise d'un bureau d'études. Des études faites ont permis d'établir que la recette $R(x)$ (en millions de francs de CFA), résultant de la vente de x centaines de kilogrammes de cacao, est définie sur [1; 5] par $R(x) = 17x$ (en millions). Monsieur POUGA vend son cacao à son client principal, au cout $C(x) = x(-x^2 + 29) - 16$ (en millions). Le bénéfice de son client principal pour x centaines de kilogrammes de cacao vendus est $B(x) = R(x) - C(x)$ défini sur [1; 5]. Le fournisseur requiert votre expertise pour savoir s'il existe au moins un x_0 dans [1; 5] tel que le bénéfice soit égale à 80 millions de francs CFA.

Votre travail consiste à résoudre les tâches suivantes en justifiant votre démarche par des calculs bien détaillés :

Tâche 1 : Déterminer lorsque des x_0 existent, leur(s) encadrement(s) au dixième près. $\boldsymbol{1,5pts}$

Tâche 2 : Déterminer, à l'unité près, une estimation de sa production en 2021. $\boldsymbol{1,5pts}$

Tâche 3 : Déterminer le prix de vente de la production de cacao de M. POUGA en 2012. $\boldsymbol{1,5pts}$

<u>Présentation générale</u>: 0,5 point (C) et **01 point** (D-Ti)

➔ L'AP Timene et Dr Kouakep [qui notent surtout la qualité combinée du raisonnement et de la rédaction].

[« *Don't forget to protect ourselves from Covid19 by following the barrier measures* », Dpt of Mathematics]