DIOCESE D'EDEA
SERVICE DIOCESAINE DE L'ENSEIGNEMENT CATHOLIQUE
SECRETARIAT A L'EDUCATION
COLLEGE SAINT PIE X
BP : 244 EDEA-CAMEROUN Email :Seducedea@gmail.com

Année Scolaire 2022-2023
Classe : Tle C durée : 4 h

CONTROLE N° 1 DU 2ème TRIMESTRE

Epreuve : MATHEMATIQUES

A-EVALUATION DES RESSOURCES : 15 points

EXERCICE 1 : 4points

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit Théorème de FERMAT : « si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$. »

On considère la suite (U_n) d'entiers naturels définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 10U_n + 21$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout n, $3U_n = 10^{n+1} - 7$. **0,5pt**
2. En déduire l'écriture décimale de U_n pour tout entier naturel n. **0,5pt**
3. Montrer que U_2 est un nombre premier. **0,5pt**
4. **a)** Démontrer que pour tout entier naturel n, U_n n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5. **0,75pt**

   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $3U_n \equiv \left(4-(-1)^n\right)[11]$. **0,5pt**

   c) En déduire que pour tout entier naturel n, U_n n'est pas divisible par 11. **0,5pt**

   d) Démontrer que $10^{16} \equiv 1[17]$ et en déduire que $U_{16k+8} \equiv 0[17]$. **0,75pt**

EXERCICE 2 : 4points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère la fonction f défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\left|-x^2 + 2x + 3\right|}$.

1. Ecrire f sans valeur absolue. **0,5pt**
2. Démontrer que la courbe de f admet deux asymptotes dont on donnera les équations.
3. **a)** Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 3. **1pt**

   b) En déduire une interprétation géométrique des résultats obtenus et la nature des points de la courbe de f d'abscisses -1 et 3. **1pt**
4. Dresser le tableau de variations de f. **1,5pt**

EXERCICE 3 : 3points

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(6;0;0)$, $B(0;5;0)$ et $C(0;0;4)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
   Quelle est l'aire de ce parallélogramme $ABCD$? **1pt**
2. Montrer que les points O, A, B et C sont non coplanaires et calculer le volume du tétraèdre $OABC$. **1pt**

3. Soit $(\mathcal{L})$ l'ensemble des points tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires. Déterminer les coordonnées entières de $(\mathcal{L})$. **1pt**

EXERCICE 4 : 4points

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, $B=\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f\left(\vec{i}\right)=\vec{i}-\vec{k}$, $f\left(\vec{j}\right)=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ et $f\left(\vec{k}\right)=\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base B. **0,5 pt**
2. **a)** Montrer que $kerf$ est une droite vectorielle de E. **0,5pt**

   b) En déduire que Imf est un plan vectoriel de E et préciser une base. **0,5 pt**
3. On donne : $\vec{e_1}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{e_2}=-\vec{i}+\vec{k}$ et $\vec{e_3}=-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$. Soit $B'=\left(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}\right)$.

   a) Montrer que B' est une base de E. **0,75 pt**

   b) Montrer que $\vec{e_1}\in kerf$ et $\vec{e_2},\vec{e_3}\in Imf$. **0,75pt**

   c) Déterminer la matrice A' de f dans la base B'. **1pt**

B- EVALUATION DES COMPETENCES : 5points

M. BELL est un biologiste. Il étudie l'effet de substances sur une espèce animale. Il a appliqué sur un effectif initial de cet espèce une substance X. Dans son laboratoire les spécialistes estiment que pour les années à venir, à compter de ce mois l'effectif de cette population d'espèce sera donné par $p(t)=360f(t)$ où f est une fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ en fonction du temps t (exprimé en mois) qui vérifie : pour tout $t\in[0;+\infty[$, $\left|f(t)-2\right|\leq\dfrac{1}{2t}$. M. BELL rêve compter 720 individus de l'espèce animal à l'unité près.

Par ailleurs M.BELL a un chantier. Il veut acheter le sable d'un voisin, contenu dans un bac rempli au plein de forme un parallélépipédique rectangle dont les dimensions avaient été codées, $3\times a\times b$ où a et b sont exprimés en mètre et sont solutions du système $\begin{cases}ppcm(a;b)=a+4\\ pgcd(a;b)=2\end{cases}$.

Ils conviennent pour un prix de $15000FCFA$ le mètre cube.

D'autre part, l'ingénieur en charge des travaux devra prévoir la construction d'un forage pour approvisionner le chantier en eau. Des recherches faites indiquent que pour trouver une bonne nappe d'eau, il faut forer le sol aux lieux définis par les points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-4-2i}{z+2+2i}$ soit imaginaire pur lorsque la propriété de M.BELL est muni d'un repère orthonormé direct.

Ces trois situations préoccupent M.BELL.

<u>Tâches</u> :

1. A quelle date le rêve de M. BELL pourra-il être réalisé ? **1,5pt**
2. Déterminer le prix d'achat du sable. **1,5pt**
3. Déterminer le lieu où l'on doit construire le forage. **1,5pt**

<u>**Présentation**</u> **: 0,5pt**