Épreuve de mathématiques

Séquence didactique N^o : 3

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte lors de la correction de la copie du candidat.

Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

Exercice 1 : (4, 75 points)

- Définir les termes suivants : **famille libre** ; **famille génératrice**. [0, 5pt]
- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $\vec{e}_1(-3; 2)$, $\vec{e}_2(1; -2)$ et $\vec{e}_3(6; -4)$. On considère également l'ensemble $F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | 2x - 5y = 0\}$.
 - Montrer que la famille $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ est libre et génératrice. Puis conclure. [0, 75pt]
 - Montrer que la famille $\{\vec{e}_1; \vec{e}_3\}$ est liée. [0, 5pt]
 - Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et préciser une base de F . [0, 75pt]
- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0; I; J)$. Soit $A(2; 4)$ et $B(-2; 1)$ On considère la droite d'équation $(\Delta) : 2x - y + 3 = 0$
 - Écrire l'équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C}_1)$ de diamètre $[AB]$. [0, 5pt]
 - Déterminer une équation normale de la droite (Δ) . [0, 25pt]
 - Calculer la distance du point A à la droite (Δ) . [0, 25pt]
 - En déduire une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre A, tangent à la droite (Δ) . [0, 5pt]
- Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que $Mes(\widehat{AMB}) = 60^\circ$, avec $AB = 4cm$. [0, 75pt]

Exercice 2 : (3, 25 points)

- Donner le nombre d'annagramme du mot **mathématiques**. [0, 5pt]
- Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $(E) : A_n^2 - 3C_n^{n-2} + 4n = -45$. [0, 75pt]
- Dans une entreprise, on dénombre 30 secrétaires : 20 parlent chinois, 18 parlent l'anglais et 12 parlent le chinois et l'anglais.
 - Déterminer le nombre de secrétaires qui parlent au moins l'une des deux langues. [0, 5pt]
 - Déterminer le nombre de secrétaires qui ne parlent aucune des deux langues. [0, 5pt]
- Le bureau de la mutuelle des secrétaires de cette entreprise est constitué d'une présidente, d'une secrétaire générale, d'une trésorière et d'un censeur.
 - Déterminer le nombre de bureaux possibles. [0, 5pt]
 - Déterminer le nombre de bureaux ne contenant que les secrétaires qui parlent le chinois et l'anglais. [0, 5pt]

Exercice 3 : (3 points)

A, B et C sont trois points non alignés du plan et E est le milieu du segment $[AC]$. Soit x un réel de l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- Pour quelles valeurs de x le système $\{(A, \cos^2 x); (B, \sin^2 x); (C, \cos 2x)\}$ ne possède-t-il pas un barycentre ? [0, 75pt]
- Lorsqu'il existe, ce barycentre est noté G_x . Démontrer que, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\vec{EG}_x = \frac{1}{2} \tan^2 x \vec{CB}. \quad [0, 75pt]$$

3. Dédurre dans I la solution de l'inéquation $\cos^2 x + \sin^2 x + \cos 2x \leq 0$. [0, 75pt]
4. Calculer la mesure principale de $\frac{2022\pi}{4}$, puis déduire la valeur de $\sin\left(\frac{2022\pi}{4}\right)$. [0, 75pt]

Exercice 4 : (4 points)

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ et $g(x) = \sqrt{-3x+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f \circ g$. [0.75pt]
2. Donner une expression explicite de $f \circ g(x)$. [0.25pt]
3. Montrer que f est surjective. [0.5pt]
4. Montrer que le point $A(-3; 2)$ est centre de symétrie à la courbe de f . [0.5pt]
5. Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} h(x) = 2x^2 + 3x + 1, & \text{si } x \leq 1 \\ h(x) = \frac{ax-3}{2x^2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
 Déterminer la valeur du réel a pour que soit continue en 1. [1pt]
6. On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = \frac{2x^2 - 3x - 9}{2x + 3}$
 - i) Calculer limite de $k(x)$ lorsque x tend vers $-\frac{3}{2}$. [0.5pt]
 - ii) k admet-elle un prolongement par continuité en $-\frac{3}{2}$? si oui définir ce prolongement. [0, 5pt]

Partie B : ÉVALUATION DES COMPETENCES(4,5 points)

Une multinationale a acheté deux parcelles de terrain pour y construire des aires de jeu à caractère commerciale.

-La première parcelle à la forme circulaire donc l'ensemble des points M du plan vérifie $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -9$, avec $AB = 60m$

-La deuxième parcelle a une forme rectangulaire dont les sommets sont les points images sur le cercle trigonométrique des solutions dans $] -\pi; \pi]$ de l'équation $2 \cos^2 2x - 3 \cos 2x - 2 = 0$.

Cette multinationale aimerait recouvrir ces deux parcelles avec du gazon synthétique qui coûte 15 000 FCFA le mètre carré.

Lors de l'achat du grillage pour clôturer la premier terrain, le mètre du grillage qui coûtait 5 000 FCFA avait subi une baisse de $x\%$ où x est un nombre pair solution de l'équation $(E) : -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6 = 0$, sachant que 1 est l'une des solutions.

Dans le cercle trigonométrique on suppose qu'une unité correspond à 25 mètres. Prendre $\pi = 3,14$

Tâches

1. Cette multinationale pourra-t-elle recouvrir entièrement la deuxième parcelle de gazon si elle dispose d'une somme de 52 000 000FCFA ? [1, 5pts]
2. Déterminer la somme à payer pour recouvrir la première parcelle de gazon. [1, 5pts]
3. Déterminer la valeur du grillage après la première remise. [1, 5pts]

Présentation : 0,5pt

Bonne chance!