Région de l'Adamaoua
Collège Protestant
Département de Mathématiques

Année scolaire 2022-2023

Classe : Tle CDTi
Devoir No : **2**
Durée : **3h**

12 novembre 2022

DEVOIR DE MATHEMATIQUES (coef 07 en C, 4 en D et Ti)

➔ ***La qualité combinée du raisonnement et de la rédaction seront des facteurs clés de cette évaluation.***

Exercice No 1 : 4 pts série C exclusivement (source : M. GPM)

1- Rappeler les théorèmes de Bezout et de Gauss. 0,5pt/C

2- Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'équation d'inconnues x et y: $75x + 27y = -6$ 0,5pt/C

3- a) Montrer que l'espace vectoriel réel E des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, est de dimension 3 lorsqu'on le muni des opérations usuelles sur les applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. $\frac{1}{2}$pt/C

b) Donner la matrice de l'application θ: E → E telle que $\theta(f) = f'$ la dérivée de f dans la base B = (u,v,w) où u : $x \mapsto 1$, v : $x \mapsto x$, w : $x \mapsto x^2$. $\frac{1}{2}$pt/C

4- Soit u un nombre complexe différent de 1 et z un nombre complexe quelconque.

a) Montrer que si u est de module 1 , alors $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$. $\frac{1}{2}$pt/C

b) Montrer que si $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$ et $\bar{u}z - u\bar{z} = 0$, alors ($z \in \mathbb{R}$ ou $|u| = 1$) . $\frac{1}{2}$pt/C

5- On a $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\theta)$ avec θ un nombre réel quelconque. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

a) Résoudre $z^2 - 2\cos(\theta)\, z + 1 = 0$ et mettre le résultat sous forme exponentiel. $\frac{1}{2}$pt/C

b) En déduire que $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$. $\frac{1}{2}$pt/C

Exercice No 2 : 4 pts série C [TOUT] et 03 pts en série TI [questions 1a-b-c et 3a-b-c] (source : GPM)

On considère la suite $(a_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $a_n = 2 \times 5^n + 7$.

1. a) Justifiez que pour tout entier naturel n, a_n est un entier naturel impair. **[0,25pt]**

b) Déterminez suivant les valeurs de n le reste modulo 8 de 5^n. **[0,5pt]**

c) Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv 1[8]$. **[0,5pt]**

2. a) Montrez que si $\begin{cases} x \equiv 1(mod\ 8) \\ x \equiv 7\ (mod\ 125) \end{cases}$, alors $x \equiv 257\ (mod\ 1000)$. **[0,5pt]**

b) Montrez que pour tout $n \geq 3$, $a_n \equiv 257\ (mod\ 1000)$. **[0,5pt]**

c) Quels sont les trois derniers chiffres de l'entier $A = (2 \times 5^{2020} + 7) \times (2 \times 5^{2021} + 7)$? **[0,5pt]**

3. a) Vérifiez que pour tout entier naturel n, $5\, a_{2n} - a_{2n+1} = 28$. **[0,25pt]**

b) Soit $= pgcd\ (\ a_{2n}\ ;\ a_{2n+1})$. Montrez par l'absurde que δ est différent de 7. **[0,5pt]**

c) Trouvez alors les valeurs possibles de δ. **[0,5pt]**

Exercice No 3 : 3 pts en C-Ti et 6 pts en D (source : GPM). **Les parties de cet exercice sont indépendantes.**

I - Calculez les limites suivantes : a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{tanx + \sin(2x)}{\sin x - \sin(2x)}$. **[0,5pt]**

II- Étudiez les branches infinies de la courbe représentative de la fonction $p: x \longmapsto 2x - \sqrt{x}$. **[0,5pt]**

III- Soit g la fonction définie sur$[0; 1[$ par : $g(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$.

1. Dresser le tableau de variation de g. **[0,75pt]**

2. Montrez que la fonction g admet une bijection réciproque g^{-1}. **[0,5pt]**

2. Montrez que g^{-1}est dérivable sur son ensemble de définition et dresser le tableau de variation de la fonction g^{-1}. **[0,75pt]**

<u>Exercice No 4</u> : 5 pts en D-Ti (source : collègue)

1) La fonction h est définie sur $I = [1; 2]$ par $h(x) = \frac{3x+2}{x+2}$.

a) Montrer que *h* réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. **0,5pt**

b) Montrer que $\forall x \in I,\ |h'(x)| \leq \frac{4}{9}$. 0,5pt

2) La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{U_n+2} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$. **0,5pt**

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geq U_n$. **0,5pt**

c) Quel conjecture pouvez-vous faire sur la convergence de la suite (U_n)? **0,5pt**

d) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - 2| \leq \frac{4}{9} |U_n - 2|$. **0,5pt**

e) En déduire que $|U_n - 2| \leq (\frac{4}{9})^n$. **0,5pt**

3) Déterminer la limite de la suite (U_n). **0,5pt**

<u>Evaluation des compétences</u> : 9 pts (Fonctions, projet GPM) Pour C, D et Ti.

<u>Situation-problème :</u>

Monsieur Ahmadou est le gestionnaire de l'entreprise où vous avez postulé pour un emploi. M. Ahmadou vous explique, lors de l'interview, que le bénéfice b en fonction du nombre x (en milliers) de chaussures est défini par :
$b(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5$, avec $1 < x < 3$.
L'entrepreneur sait qu'il existe un nombre unique de chaussure $x =$ X pour lequel le bénéfice est nul.
L'entreprise est située dans un village où les habitants fêtent deux évènements N et Y. L'évènement N est célébré tous les 140 jours et l'évènement Y, tous les 108 jours. Les jours où les fêtes des évènements N et Y coïncident sont considérés comme jours de **grâce**. Un matin M le village a célébré Y, huit jours après avoir célébré N. L'entreprise souhaite éviter de programmer une journée de travail, à la fête du prochain jour de **grâce**.

M. Ahmadou vous propose de l'aider pour ces trois tâches pour passer votre interview:

1. (C-D-Ti) Donne numériquement, à l'unité près, le nombre de chaussures dont le bénéfice est nul. **(3pts)**
2. (D-Ti) Donne (en fonction de X) l'intervalle de valeurs du nombre de chaussures menant à une perte ? **(3pts)**
3. (C-D-Ti) Donne (en fonction de X) l'intervalle de valeurs du nombre de chaussures menant à un gain positif ? **(3pts)**
4. **(C) Trouve le jour de grâce le plus proche après le matin M.** **(3pts)**

➔ L'AP Timene et MT Dr Kouakep [qui notent la qualité combinée du raisonnement et de la rédaction].