COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2022-2023
Département de Mathématiques	**CONTROLE**	**Situation Scolaire N°1** **Date : 01 Octobre 2022**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : **Tle C** Durée : **04 heures** Coef: 7

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES **15,5 POINTS**

Exercice 1 : 05,50 Points

A- Soit l'énoncé suivant : ***« s'il pleut, Alex prend un parapluie. Bertine ne prend jamais de parapluie s'il ne pleut pas et en prend toujours un quand il pleut »***

On considère les propositions logiques suivantes : $\boldsymbol{p}$: "$il\ pleut$" ; $\boldsymbol{q}$: "$Alex\ a\ un\ parapluie$" et $\boldsymbol{r}$: "$Bertine\ a\ un\ parapluie$".

Pour chaque affirmation du ***tableau 1***, retrouver sa conclusion dans le ***tableau 2***. 0,5pt×6=***3pts***

Tableau 1
1- q est vraie
2- $non\ q$ est vraie
3- r est vraie
4- $non\ r$ est vraie
5- $non\ p$ est vraie
6- p est vraie

Tableau 2
a) Donc Alex et Bertine ont tous deux leur parapluie.
b) Donc il pleut.
c) Donc il ne pleut pas.
d) On ne peut rien conclure.
e) Donc Bertine se promène sans parapluie.
f) Donc Alex et Bertine n'ont pas leur parapluie.

Tableau 1 ***Tableau 2***

B- Le but de cette partie est de retrouver la valeur exacte, sans utiliser une calculatrice, du nombre $A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Soient a et b deux nombres entiers naturels tels que $t = \left(a + b\sqrt{2}\right)^3$ avec $t = 20 + 14\sqrt{2}$.

1- Montrer que les nombres a et b vérifient le système (I) : $\begin{cases} a(a^2 + 6b^2) = 20 \\ b(3a^2 + 2b^2) = 14 \end{cases}$. ***0,5pt***

2- Déterminer le(s) couple(s) d'entiers positifs (a, b) vérifiant le système (I). ***1pt***

3- Déterminer la valeur de A, en montrant les étapes du calcul. ***0,5pt***

C- Déterminer les entiers relatifs n, tels que $\frac{5n^2+8}{2n-1}$ soit un nombre entier relatif. ***0,5pt***

Exercice 2 : 02,00 Points

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n \\ v_{n+1} = -(n+1)v_n \end{cases}$ avec $u_1 = 1, v_1 = -1$.

1- La suite (v_n) est-elle géométrique ? ***0,5pt***

2- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = (-1)^n.n!$. ***0,5pt***

3- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,
$u_n = (-1)^{n+1}n!\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$. ***1pt***

Exercice 3 : 04,50 Points

A- Un nombre entier naturel N s'écrit $\overline{abcca}^5$ et $\overline{bbab}^8$

1- Montrer que l'on a : $309a - 226b + 15c = 0$. ***0,5pt***

2- Montrer que $b \equiv 0[3]$ et $(3a - 1) \equiv 0[5]$. ***1pt***

3- En déduire les valeurs de a, b et c. ***0,75pt***

B- Soit p un nombre premier. ***On rappelle que*** $\boldsymbol{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$ ***et*** $\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}}$.

1- **a)** Démontrer que pour tout entier k compris entre 0 et p , C_p^k est un multiple de p. ***0,5pt***

b) En déduire que pour tout entier relatif a et b, $(a+b)^p \equiv (a^p + b^p)[p]$. ***0,5pt***

2- Montrer que $a^7 + b^7$ est un multiple de 7 si $a + b$ est un multiple de 7. ***0,5pt***

3- Trouver les entiers relatifs x tels que : $\begin{cases} -10 \leq x \leq 10 \\ (x^7 + 128) \equiv 0[7] \end{cases}$. ***0,75pt***

Exercice 4 : 03,50 Points

Soient p et q deux nombres réels.

1- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :
$p^{n+1} - q^{n+1} = (p-q)(p^n + p^{n-1}q + \cdots + pq^{n-1} + q^n)$. ***0,5pt***

2- Soit n, a et b trois entiers relatifs non nuls. Montrer que si n divise a et $a - b$, alors n divise b. ***0,5pt***

3- On pose $a = 27^{n+1} - 26n - 27$ et $b = 27^{n+2} - 26(n+1) - 27$.

a) Montrer que 676 divise $a - b$. ***0,5pt***

b) En utilisant les questions précédentes, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, 676 divise $27^{n+1} - 26n - 27$. ***0,5pt***

4- On pose à présent $p = 5n - 3$ et $q = n + 1$.

a) Démontrer que tout diviseur commun à p et q est un diviseur de 8. ***0,5pt***

b) En déduire tous les diviseurs positifs commun à p et q. ***0,5pt***

c) Montrer que si n est pair alors p et q admette un seul diviseur positif commun que l'on déterminera. ***0,5pt***

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES — 04,5 POINTS

Situation :

Monsieur Fotso un grossiste dans la vente du ciment, va recevoir dans les jours qui suivent un camion contenant 14550 sacs de ciments. Il lui faudra donc des détaillants pour écouler toute sa marchandise. Chacun d'eux devra prendre entre 150 et 300 sacs de ciments et aussi déposer chacun une caution de 50000 francs dans un compte bancaire ouvert par M. Fotso pour l'occasion. Après tous les dépôts effectués, M. Fotso constate qu'il a moins de 3000000 francs.

Après cette bonne affaire M. Fotso décide d'encourager ses enfants après leur bon travail à la première situation scolaire (première séquence). Il a donc prévu une certaine somme d'argent à distribuer à tous les enfants. Ainsi le premier reçoit 1000F plus le dixième du reste, le second reçoit 2000F plus le dixième du reste, le troisième reçoit 3000F plus le dixième du reste et ainsi de suite jusqu'au dernier. A la fin du partage, ils se rendent compte qu'ils ont reçu exactement la même somme d'argent.

Voulant faire un retrait dans son compte devant un distributeur, M. Fotso se rend compte qu'il a oublié le code de sa carte, mais se rappelle qu'il avait inventé un procédé afin de retrouver tous les quatre chiffres du code de sa carte bancaire : ***le premier chiffre est le plus petit de tous et le dernier est un multiple de 4, la somme des deux derniers chiffres est le numéro de son jour de naissance et le produit de tous les chiffres du code est égal à son année de naissance***. M. Fotso est né le 15 Février 1960 à Garoua.

Tâches

1- Retrouver la somme exacte disponible dans le compte de M. Fotso après tous les dépôts. ***1,5pt***

2- Déterminer le code confidentiel de la carte bancaire de M. Fotso. ***1,5pt***

3- Déterminer le nombre d'enfants de M. Fotso. ***1,5pt***