



Épreuve de Mathématiques

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15,5pts)

Exercice 1 (4pts)

- Déterminer et représenter les points $M(z)$ tels que : $|z + 1 + 3i| = |-z + 1 + 2i|$ (0,75pt)
- Déterminer et représenter les points $M(z)$ tels que : $|(1 + 2i)z + 3 - 4i| = |2 - i|$ (1,25pts)
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $3iz^2 - (1 + 5i)z + 2 - 3i = 0$ (1pt)
- Linéariser $\cos^4 x$. (1pt)

Exercice 2 (4pts)

On considère dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation : $(E) : z^3 - z^2 - (1 + i)z - 2 + 2i = 0$

- Démontrer que (E) admet une racine réel α (0,75pt)
- Déterminer a, b, c tels que : $z^3 - z^2 - (1 + i)z - 2 + 2i = (z - \alpha)(az^2 + bz + c)$ (0,75pt)
- Résoudre (E) dans \mathbb{C} (1pt)
- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, quelle est la nature du triangle des points dont les affixes respectives sont les trois solutions de l'équation (E) (0,75pt)
- On donne $a = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2i}$; écrire a sous sa forme exponentielle (0,75pt)

Exercice 3 (4pts)

On considère les nombres complexes $z_1 ; z_2$ et z_3 définis par $z_1 = \sqrt{3} - 3i ; z_2 = -2 + 2i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

- Écrire z_3 sous forme algébrique. (0,5pt)
- Écrire $z_1 ; z_2$ puis z_3 sous forme trigonométrique. (1,5pts)
- Déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{\pi}{12})$ (1pt)
- Déterminer la forme algébrique de $(-2 + 2i)^{20}$ (1pt)

Exercice 4 (3,5pts)

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct. On considère le point A_1 d'affixe $Z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Calculer $|Z_1|$. En déduire que A_1 est sur le cercle (C) de centre O et de rayon 1. Représenter A_1 sur le repère (Unité : 4cm). (0,5pt)
- On considère le point A_0 d'affixe 1 et les points A_n d'affixes $Z_n = (Z_1)^n$ où n est un entier naturel non nul.
 - Calculer Z_2 . Représenter A_0 et A_2 sur le même repère. (0,5pt)
 - Calculer $|Z_n|$. En déduire que les points A_n sont sur le cercle (C) . (0,5pt)
- Démontrer que : $Z_{n+1} - Z_n = (Z_1)^n [-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}]$. En déduire le module de $Z_{n+1} - Z_n$, puis la distance $A_n A_{n-1}$ (1,5pts)

4. a) Dédurre des questions précédentes que les triangles OA_nA_{n+1} sont équilatéraux. (0,5pt)
 b) Dédurre que $A_6 = A_0$ (0,5pt)

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5pts)

Compétence : Résoudre une situation problème, déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématique en faisant appel aux propriétés des nombres complexes et la mise en système d'équations et inéquations.

SITUATION

M. Madeng qui est un chasseur professionnel disposant un équipement de dernière génération s'en va dans une réserve pour chasser. L'éco garde lui donne les consignes suivante : il ne doit que chasser les hérissons, les biches et certains gros oiseaux ; il devra donner 1000FCFA pour chaque biche, 500FCFA pour chaque oiseau et 750FCFA pour chaque hérissons tué ; il ne doit pas arrêter plus de 10 animaux par espèce ; il lui montre le sommet d'un arbre qui représente l'origine d'un repère bien défini, et deux points A et B avec les coordonnées $A(\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \frac{-\sqrt{3}-1}{2})$ et $B(\frac{\sqrt{3}+1}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2})$ en lui disant qu'il ne doit pas chasser en dehors de la zone délimitée par les points M d'affixes Z vérifiant $|\frac{Z-Z_A}{Z_B-Z}| = \frac{59}{2}$ ou Z_A et Z_B sont les affixes des points A et B , et le symbole $|\cdot|$ représente le calcul d'une longueur. M. Madeng se trouvant sur ce sommet aperçoit une biche au point A , pour atteindre cet animal il doit positionner son arme de telle sorte que l'angle obtenu avec l'axe des abscisses soit bien précise pour ne pas louper sa cible. A la sortir de la chasse, on dénombre 74 pattes d'animaux, plus de 6 biches et plus de 4 oiseaux. Il se voit alors donner une somme de 16250FCFA.

N.B : On pourra écrire sous forme algébrique le nombre : $\frac{(2+2i)(\sqrt{3}+i)^2}{(1+i\sqrt{3})^3}$.

TACHES

Tache 1 : Déterminer le nombre d'animaux tués par espèce par M. Madeng (1,5pts)

Tache 2 : Déterminer l'angle que M. Madeng doit obtenir pour atteindre cette biche. (1,5pts)

Tache 3 : Déterminer l'aire que M. Madeng doit effectuer sa chasse. (1,5pts)

BONNE CHANCE

Faites bien l'école <http://www.sujetex.com> fera du bien !