Evaluation des Ressources : 15 points

Exercice 1 (3 points) PPCM, PGCD, nombres premiers.

On se propose de résoudre le système suivant dont l'inconnue est le couple (x, y) d'entiers naturels non nuls tels que $x > y$ $\begin{cases} (x-y)^2 = x+y(1) \\ PPCM(x, y) = 495(2) \end{cases}$

1. (Résolution de (1))
   On pose $z = x - y$ et on considère comme nouvelle inconnue le couple (z, y).
   (a) Quelle relation vérifie z et y ? **(0,5pt)**
   (b) En déduire que $2y$ est un produit de deux entiers consécutifs. **(0,5pt)**
   (c) En déduire que les solutions de l'équation (1) sont de l'une des formes suivantes :
   $\begin{cases} x = k(2k+1) \\ y = k(2k-1) \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ ou bien $\begin{cases} x = (k+1)(2k+1) \\ y = k(2k+1) \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. **(0,75pt)**
2. (Résolution du système).
   On suppose que les solutions du système sont sous la forme : $\begin{cases} x = k(2k+1) \\ y = k(2k-1) \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$
   (a) Donner en fonction de k, le PGCD de x et y. **(0,75pt)**
   (b) En déduire le PPCM de x et y en fonction de k. **(0.5pt)**
   (c) Montrer que le double de ce PPCM est le produit de 3 entiers consécutifs. **(0.5pt)**
   (d) Résoudre dans ce cas le système. **(1pt)**

Exercice 2(2,5 points)

1. Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$
   (a) Montrer que la suite (a_n) est croissante **(0,25 pt)**
   (b) On définit la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $b_n = a_n + \dfrac{1}{n.(n!)}$. Démontrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. **(0,25 pt)**
   (c) Démontrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ a_p \leq b_q$. **(0,75 pts)**
   (d) En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes. **(0.5 pt)**
   (e) Démontrer que la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers zéro. **(0.5 pt)**
   (f) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. **(0,25 pt)**

Exercice 3 (4,5pts)

1. On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1$ où $a,\ b \in \mathbb{R}$
   (a) Démontrer que si z_0 est une solution de (E), $\overline{z_0}$, $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\overline{z_0}}$ sont également des solutions de (E). **0,75 pt**
   (b) Déterminer a et b sachant que $1 + i$ est une solution de (E). **0,75 pt**
   (c) En déduire trois autres racines de l'équation $P(z) = 0$ **0.5 pt**
   (d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ **0.5 pt**
2. (a) Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes solutions de l'équations $Z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$. **(0,75pt)**

(b) Vérifier que la complexe $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ est une racine quatrième du complexe $8(1-i\sqrt{3})$. **(0,25pt)**

(c) En déduire la forme algébrique des solutions de l'équation $Z^4 = 8(1-i\sqrt{3})$. **(0.5pt)**

(d) Déduire des questions 2. et 4. les valeurs exactes de $\sin\frac{17\pi}{12}$ et $\cos\frac{17\pi}{12}$. **(0,5pt)**

Exercice 3 (5pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-x^2+x}{1-x}}$.

On nomme $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm .

Le but de l'exercice est d'étudier cette fonction. Pour mener à bien cette étude, il est nécessaire d'étudier au préalable une fonction auxiliaire g.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{x^3-x^2+x}{1-x} \geq 0$; puis en déduire le domaine de définition D_f de f. **(0.5pt)**
2. Soit $g(x) = -2x^3+4x^2-2x+1$.
   (a) Étudier les variations de g et donner sa représentation graphique dans un repère $(O;I;J)$. **(0.5pt)**
   (b) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0;1]$. **(0.5pt)**
3. (a) Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ et en déduire l'équation de la tangente à (C_f) en $x_0 = 0$. **(0.75pt)**
   (b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f. **(0.25pt)**
   (c) Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{2(1-x)^2 f(x)}$. **(0.5pt)**
4. (a) Étudier les variations de f sur $[0;1]$. **(0.5pt)**
   (b) Tracer la courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé du plan. **(0,5pt)**
5. (a) Montrer que f est une bijection de $]0;1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera. **(0.5pt)**
   (b) Tracer la courbe $(C_{f^{-1}})$ de la bijection réciproque. **(0.5pt)**

Evaluation des Compétences : 4,5 points

Monsieur MOUSSA est Comptable dans une société de micro finance. Il a un chantier qui n'est malheureusement pas desservi par une voie que peut emprunter un engin à moteur. Il achète le sable et a versé chez son voisin situé à une centaine de mètres du chantier. Ce sable livré par une société et acheter à raison de 15000F le mètre cube (m^3) est contenu dans un bac plein de forme parallélépipédique de dimensions $3m \times am \times bm$ où a et b vérifient en mètre le système : $\begin{cases} PPCM(a;b) = a+3 \\ PGCD(a;b) = 2 \end{cases}$. Ce sable devrait être transporté en 100 tours dans des seaux identiques et pleins par des garçons et des filles du quartier. Les garçons ont effectué 8 tours et les filles 5 tours. Pour les motiver, il leur propose un taux forfaitaire de 1000F par personne. Pour régler les problèmes d'eau du chantier, M. Moussa fait creuser un puis par l'entreprise qualifiée. Pour atteindre la nappe phréatique qui est à $2046m$, cette entreprise creuse $2m$ le premier jour, $4m$ le deuxième, $8m$ le troisième jour, $16m$ le quatrième jour et ainsi de suite, cette entreprise est payé suivant le contrat suivant : $5000F$ le premier jour, $8000F$ le deuxième jour, $11000F$ le troisième jours, $14000F$ le quatrième jour et ainsi de suite.

Tâche 1 : Déterminer le prix d'achat du sable. **(1.5pt)**

Tâche 2 : Déterminer le montant nécessaire à prévoir par M. MOUSSA pour satisfaire les transporteurs sachant qu'il y a plus de garçons que de filles. **(1.5pt)**

Tâche 3 : Déterminer la somme depensée par Moussa pour creuser le puit. **(1.5pt)**

Présentation : **0,5 pt**