

Lycée du Manengouba - Nkongsamba		Année Scolaire 2022 / 2023	
Département de Mathématiques		Classe : T ^{le} TI	Evaluation N° 02
Epreuve de Mathématiques		Durée : 4 H 00	Coefficient : 4

La qualité de la rédaction, la démarche vers le résultat et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie de l'apprenant.

I – EVALUATION DES RESSOURCES : [15 Points]

EXERCICE 1 : [5 Points]

1°) Le but de cette question est de déterminer tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels solutions du système d'équations (S) : $\begin{cases} \text{PPCM}(a ; b) = 60 \\ a + b = 27 \end{cases}$

a°) Déterminer l'ensemble (D_p) des diviseurs positifs communs à 60 et 27. 0,5 pt

b°) On pose $\delta = \text{PGCD}(a ; b)$ et $\mu = \text{PPCM}(a ; b)$.

Montrer que, (S) est équivalent au système (S') : $\begin{cases} \delta a' b' = 60 \\ \delta(a' + b') = 27 \end{cases}$ où $\text{PGCD}(a' ; b') = 1$. 0,25 pt

c°) En déduire que $\delta \in (D_p)$. 0,25 pt

d°) Résoudre le système (S') dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et en déduire tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels solution de (S). 0,5 pt $\times 2 = 1$ pt

2°) On pose pour tout $a \in \mathbb{N}$, $B = \overline{1335}^a$. Donner l'écriture de B dans la base $a + 1$. 1 pt

3. a°) Déterminer l'ensemble D_{48} des diviseurs entiers naturels de 48. 0,5 pt

b°) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $A = \frac{3n^3 - 11n}{n + 3} \in \mathbb{N}$. 1,5 pt

EXERCICE 2 : [5 Points]

1°) Soit Z un nombre complexe différent de 4 ($Z \neq 4$). Montrer que, $\frac{iZ - 4}{Z - 4}$ est un réel si et seulement si $\frac{Z + 4i}{Z - 4}$ est un imaginaire pur. 0,5 pt

2°) Soit le polynôme complexe P défini par : $P(Z) = Z^4 - 2Z^3 + 6Z^2 - 2Z + 5$.

a°) Calculer $P(i)$ et conclure. 0,5 pt

b°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $Z^2 + 1 = 0$ et $Z^2 - 2Z + 5 = 0$. 1 pt

3. a°) Pour tout $Z \in \mathbb{C}$, montrer que $\overline{P(Z)} = P(\overline{Z})$. 1 pt

b°) En déduire que, si Z_0 est racine de P , alors $\overline{Z_0}$ est aussi racines de P . 0,5 pt

c°) En déduire que P est factorisable par $Z^2 + 1$. 0,5 pt

4. a°) Déterminer les nombres complexes α et β tel que $P(Z) = (Z^2 + 1)(Z^2 + \alpha Z + \beta)$. 0,5 pt

b°) En déduire dans $\mathbb{C}$ toutes les racines de P . 0,5 pt

EXERCICE 3 : [5 Points]

1°) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = 1 + (n - 1) \times 2^n$. 0,5 pt

2°) Soit f la fonction définie sur $I = [0 ; 1]$ par $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

a°) Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. 1 pt

On désigne par f^{-1} la bijection réciproques de f .

b°) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0 ; 1[$. 0,5 pt

c) Montrer que, pour tout $x \in]0 ; 1[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - x^2}}$. 1 pt

d) Dresser le tableau de variations de f^{-1} sur $]0 ; 1[$. 0,75 pt

3°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

a°) Dresser le tableau des variations de g . 0,75 pt

b°) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α tels que :

$0,65 \leq \alpha \leq 0,66$. 0,5 pt

II – EVALUATION DES COMPETENCES : [5 Points]

Situation :

YOPA et sa sœur **NGA** sont ensemble au point de départ d'une marche à **8 h 30**. La marche consiste à faire plusieurs fois le tour d'un stade de football. **YOPA** met **3 minutes et 40 secondes (3 mn 40 s)** alors que sa sœur **NGA** met **4 minutes et 44 secondes (4 mn 44 s)** pour faire un tour complet de ce stade. **YOPA** est né en **19a6** où **a** est un chiffre du système décimal. En **2010**, l'âge de **YOPA** est égal à la somme des chiffres de son année de naissance.

La valise de **NGA** s'ouvre avec un code correspondant à l'écriture en base deux du nombre formé par la racine réelle et la partie imaginaire de la racine imaginaire pure du polynôme complexe **P** défini par : $P(Z) = Z^3 - 2Z^2 - (4 + 4i)Z - 16 + 16i$.

Tâches :

- 1°) Déterminer l'année de naissance de **YOPA** et son âge en **2010**. 1,5 pt
- 2°) Retrouver le code qui ouvre la valise de **NGA**. 1,5 pt
- 3°) À quelle heure **YOPA** et sa sœur **NGA** vont-ils encore se rencontrer au point de départ de leur marche ? 1,5 pt

Présentation : 0,5 pt