COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2022-2023
Département de Mathématiques	**MINI SESSION**	**Situation Scolaire N°2** Date : Novembre 2022

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : **Tle C** Durée : **04 heures** Coef: 7

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES **15,5 POINTS**

Exercice 1 : 02,50 Points

On considère le nombre entier naturel $a_n = \underbrace{111 \dots 1}_{n\ fois}$.

1- Déterminer a_1 et a_2. ***0,5pt***

2- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$. ***0,75pt***

3- On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $\in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$. ***0,75pt***

b) En déduire la valeur du nombre $B = 5 + 55 + 555 + \cdots + \underbrace{555 \dots 5}_{20\ fois}$. ***0,5pt***

Exercice 2 : 04,00 Points

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1- Montrer que les nombres n et $2n + 1$ sont premiers entre eux. ***0,5pt***

2- On pose $p = n + 3$ et $q = 2n + 1$ et on désigne par d_1 le $PGCD$ de p et q, $(d_1 > 0)$.

a) Montrer que d_1 divise 5 et en déduire les valeurs possibles de d_1. ***0,75pt***

b) Démontrer que p et q sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5. ***0,5pt***

3- Soient les nombres $a = n^3 + 2n^2 - 3n$; $b = 2n^2 - n - 1$ et $d_2 = PGCD[n(n + 3); 2n + 1]$.

a) Montrer que a et b sont divisibles par $n - 1$. ***0,5pt***

b) Montrer que $d_1 = d_2$. ***0,75pt***

c) En déduire les valeurs de $PGCD(a, b)$ en fonction de n. ***0,5pt***

d) Déterminer $PGCD(a, b)$ pour $n = 2022$. ***0,5pt***

Exercice 3 : 0 3,00 Points

1- Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 5929. ***0,5pt***

2- Déterminer les entiers naturels strictement supérieurs à 1 dont les carrés divisent 5929. ***0,5pt***

3- Déterminer les couples (x, y) d'entiers naturels tels que $x^2 + x^2y = 5929$. ***0,5pt***

4- On cherche les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E): $x^2 - 91x + 588 = 0$.

a) Résoudre l'équation (E). ***0,5pt***

b) Déterminer alors les couples (a, b). ***1pt***

Exercice 4 : 06,00 Points

Les parties A et B sont largement indépendantes.

Partie A : On considère l'équation (E) d'inconnue z, suivante : $10z^2 - 2z + 1 = 0$

1- Déterminer les racines complexes z_1 et z_2 de (E), la partie imaginaire de z_1 étant positive. ***1pt***

http://sujetexa.com

2- Soit $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $tan\theta = 3$. Montrer que $z_1 = \frac{cos\theta + isin\theta}{10\ cos\theta}$ et $z_2 = \frac{cos\theta - isin\theta}{10\ cos\theta}$. ***1pt***

3- On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = z_1^n + z_2^n$.

a) Montrer que v_n est un nombre réel que l'on déterminera en fonction de n et θ. ***0,5pt***

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $|v_n| \leq 2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^n$. ***0,5pt***

Partie B : Soient $S_1 = 1 + cos\ \theta + cos\ 2\theta + \cdots + cos\ n\theta$ et $S_2 = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta$. On pose $S = S_1 + iS_2$.

1- Déterminer S_1 et S_2 lorsque $\theta = 2k\pi$ avec $k \in Z$. ***1pt***

2- On suppose pour la suite que $\theta \neq 2k\pi$ avec $k \in Z$.

a) Montrer que $S = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$. ***0,75pt***

b) Montrer que $S = e^{in\frac{\theta}{2}} . \left(\frac{sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$. ***0,75pt***

3- En déduire alors les expressions simplifiées de S_1 et S_2 en fonction de n et θ. ***0,5pt***

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,5 POINTS

Situation : Quatre malfrats braquent un homme d'affaires et emporte une somme inférieure à 14 mille euros. Ils décident alors de se rendre dans un restaurant réputé pour sa bonne cuisine pour fêter leur succès et se partager le butin (le partage étant équitable). S'ils se partagent le triple du butin, il restera 3 mille euros. Malheureusement un des bandits meurt des suites de blessures reçus lors des échanges de tirs avec la police. Si le reste du groupe se partagent le double du butin, il restera mille euros. Le patron du restaurant en passant a écouter et a donc une idée sur le lieu de la cachette du butin.

Quelques jours plus tard les trois malfrats restant ont été arrêtés et jetés en prison. Les gars ne comptent pas abandonner leur butin et commencent donc à réfléchir sur un plan d'évasion. Ils ont observés pendant un an, 3 lampes qui brillent et éclairent toute la cour de la prison chaque nuit après 18h00, heure avant laquelle elles sont toutes les trois éteintes : la première lampe s'éteint toutes les heures, la deuxième toutes les 36 minutes et la troisième toutes les 90 minutes. Ils se sont donc enfuit lorsque les trois lampes étaient simultanément éteintes après 22 heures et avant 02 heures du matin.

Le jour où ils décident d'aller sur le lieu de la cachette du butin, ils prennent comme chauffeur leur ancien ami, Alfred qui sait que sur ce trajet entre 07h et 07h20 la police n'est pas présente mais aussi il doit faire attention car il y a deux feux tricolores qu'il juge mal synchronisés. En effet il a après étude remarqué que : le premier feu reste vert pendant 60 secondes et rouge pendant 30 secondes, le second feu qu'il rencontre 875 mètres plus loin en roulant à la vitesse de 45 km/h, reste vert pendant 45 secondes et rouge pendant 50 secondes ; de plus il a remarqué que ces deux feux passaient au vert en même temps à minuit. Alfred recherche un synchronisme de ces deux feux, c'est-à-dire voudrait savoir à quelle heure exactement il devrait arriver au premier feu au moment où il passe au vert et tel que le second feu passe au vert lorsqu'il arrive à sa hauteur pour ne pas avoir à s'arrêter pour attendre.

Tâches :

1- Que gagnera le patron du restaurant si les trois autres malfrats trépassent ? ***1,5pt***

2- Déterminer l'heure à laquelle les trois malfrats se sont évadés de la prison. ***1,5pt***

3- Déterminer l'heure exacte à laquelle Alfred doit arriver au premier feu. Afin de bénéficier de ce synchronisme des feux et éviter la police. ***1,5pt***

http://sujetexa.com