EVALUATION 4 DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 h coefficient : 6

Partie A : Evaluation des ressources 15,5 points

Exercice 1 : 3 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit le cercle $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ et la droite $(D_{a,b}): x + y - a^2 - b^2 - 1 = 0$. On désigne par Ω le centre du cercle (C). On considère le système $(S):\begin{cases} ax - by = 0 \\ x - \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$; l'équation $(E): -x^2 + bx - a = 0$ et on pose $G = bar\{(A;a),(B;b)\}$.

1. Exprime en fonction de a et b la distance du point Ω à la droite $(D_{a,b})$. **[0,5 pt]**

2. On dispose de deux urnes U_1 contenant les boules numérotées 0; 1; $\sqrt{2}$ et U_2 contenant les boules numérotées -1; -1; 0; 2; 3; 3. Une opération consiste à tirer deux boules dont l'une dans l'urne U_1 et l'autre dans l'urne U_2. On désigne par a le numéro de la boule tirée de U_1 et par b celui de la boule tirée dans U_2. Détermine le nombre de tirages pour que :
   a. $(D_{a,})$ et (C) soient tangents. **[0,5 pt]**
   b. $(D_{a,b})$ et (C) soient disjoints. **[0,5 pt]**
   c. (S) admette une infinité de solutions. **[0,5 pt]**
   d. (E) admette exactement deux solutions distinctes. **[0,5 pt]**
   e. G soit isobarycentre des points A et B. **[0,5 pt]**

Exercice 2 : 3 points

E est un plan vectoriel de base $(\vec{i};\vec{j})$; a ∈ IR et f_a l'endomorphisme de E qui au vecteur $\vec{u}(x,y)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = x \\ y' = (1-a)x + ay \end{cases}$

1- a) ecrire la matrice M de f_a dans la base $(\vec{i};\vec{j})$. **0.25pt**

b) pour quelles valeurs de a f est-il un automorphisme de E ? **0.25pt**

2- c) déterminer le noyau (kerf_o) et l'image de f_o (Imf_o). **0.5pt*2=1pt**

d) on pose $\vec{e_1} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{e_2} = \vec{j}$; déterminer la matrice M_0 de f dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ **0.5pt**

3- calculer alors $M \times M_0$ et $M_0 \times M$ puis comparer le résultat. **1pt**

Exercice 3 : 4 points

ABCD est un carré de centre O, de sens direct et de côté 4cm. On désigne par E la symétrique de A par rapport à C et par K le milieu de $[AB]$.

I) On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1- a) Déterminer la droite (D) telle que $t = S_{(OK)}oS_{(D)}$. 0,5pt

b) Déterminer la droite (D') telle que $r = S_{(D')}oS_{(OK)}$. 0,5pt

2- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan $f = rot$. 0,5pt

II) On pose $r_1 = r(B;\frac{\pi}{2})$; $r_2 = r(A;\frac{\pi}{2})$ et $r_3 = r(O;-\frac{\pi}{2})$.

1- Déterminer l'image de C par la transformation r_3or_1. 0,5pt

2- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r_3or_1. 0,5pt

I) Pour tout réel x, on donne l'équation $(E): cos^4x + sin^4x = \frac{1}{8}cos2x + \frac{\sqrt{3}}{8}sin2x + \frac{3}{4}$.

1- En utilisant le développement de $(cos^2x + sin^2x)^2$, montrer que $cos^4x + sin^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}cos4x$. 0,75pt

2- En déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $cos4x = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$. 0,75pt

3- Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation (E). 0,75pt

Exercice 4 : 5,5 points

I-) Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-3x+a}{x-3} & si\ x \geq 2 \\ f(x) = x - 1 + \frac{6}{x} & si\ x < 2 \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$

1-) Déterminer l'ensemble de définition de f et la valeur de a pour laquelle f est continue en 2. 1pt

2-) On pose que $a = 2$, étudier la dérivabilité de f en 2. 0,5 pt

II-) La courbe ci-dessous est celle de la dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

1-) Donner le signe de $f''(x)$ puis de $f'(x)$ suivants les valeurs de x. 0,5pt

2-) Déduire le sens de variation de f. 0,5 pt

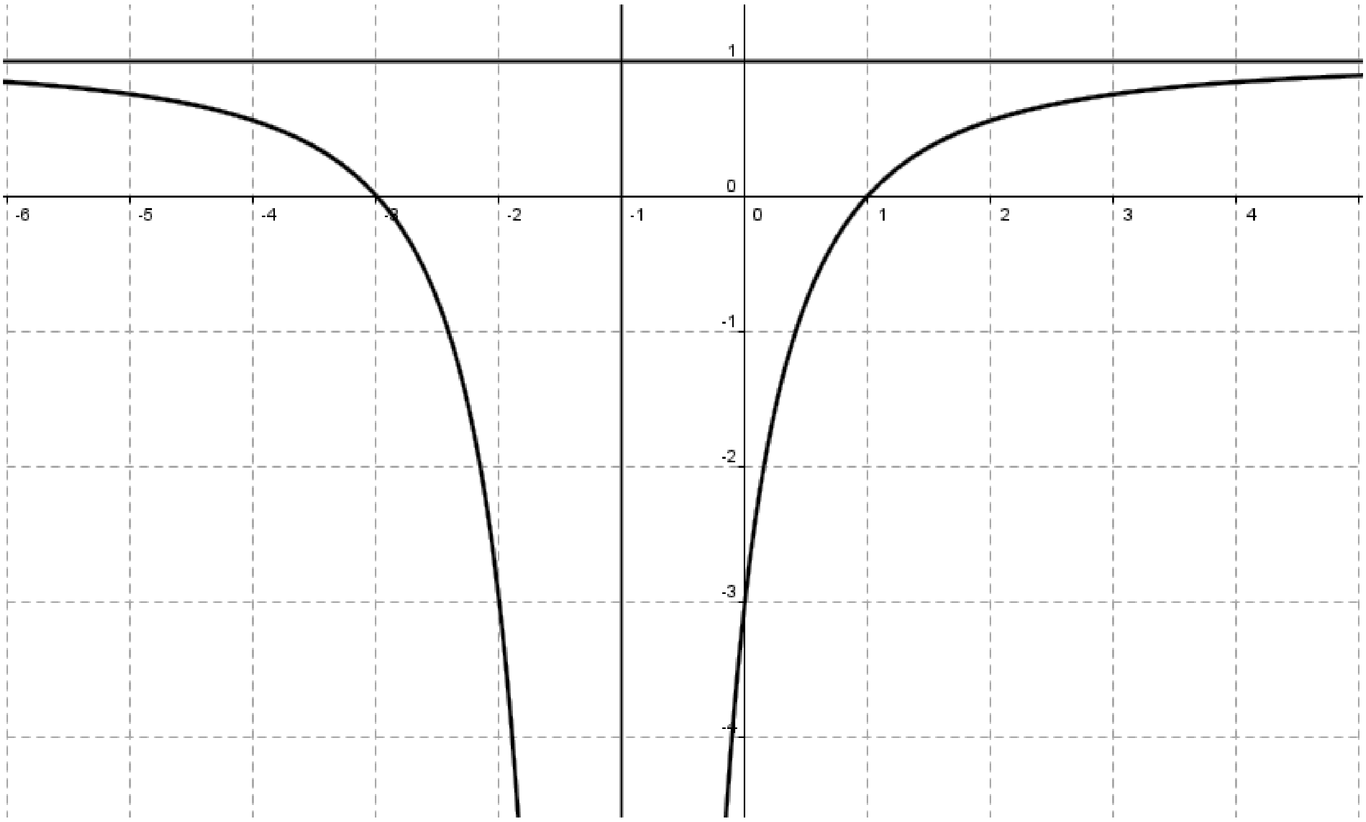
3-) On pose $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ et que sa courbe passe par le point $A(1\,;0)$.

3-a) Montrer que $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x+1}$. 0,75pt

3-b) Donner les équations des asymptotes à la courbe de la fonction f. 0,5 pt

3-c) déterminer les coordonnées des autres points de rencontre de la courbe de f avec les axes du repére et étudier la position de la courbe de f par rapport à son asymptote oblique. 1pt

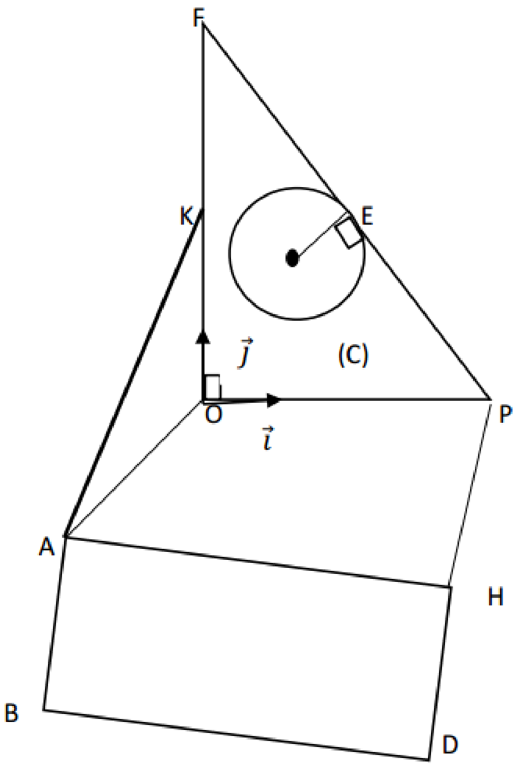
4-) Construire la courbe de f. 0,75pt



Partie B : Evaluation des compétences 4,5 points

Un ingénieur veut concevoir le dispositif représenté par la figure ci-contre fait en bois pour la réalisation d'un projet. Le morceau de bois représenté par le segment $[AK]$ étant abimé, il veut remplacer ce morceau par un autre ayant la forme d'un arc de cercle représentant l'ensemble des solutions dans $]-\pi;\ \pi]$ de l'inéquation $(I): 2sin^2x - 5sinx - 3 \geq 0$ sur un cercle trigonométrique (unité graphique : 6m). Ce morceau de bois ayant la forme d'un arc de cercle ainsi que les morceaux représentés par les segments $[EP]$ et $[AH]$ étant de mauvaise qualité, il désire les traiter avec un produit chimique qui nécessite $\frac{3}{5}$ de litre pour 2 mètres.

Dans ce montage, tout point $M(x\ ;\ y)$ de (C) vérifie $(x-1)(x-5)+(y-2)(y-6)=0$ et $P(11\ ;\ 0)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité de longueur est le mètre et le point E a des coordonnées entières positives. Le rectangle AHDB d'aire 64 m^2 est tel que son périmètre soit minimale.



Tâches :

1- Déterminer la quantité du produit chimique nécessaire pour traiter le morceau de bois représenté par l'arc de cercle qui remplacera le segment $[AK]$. 1,5pt

2- Déterminer la quantité du produit chimique nécessaire pour traiter le morceau de bois représenté par le segment $[EP]$. 1,5pt

3- Déterminer la quantité du produit chimique nécessaire pour traiter le morceau de bois représenté par le segment $[AH]$. 1,5pt