EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Partie A : Evaluation des ressources(15,5pts)

Exercice 1 : 5 pts

I. Soit a et n deux entiers naturels $(n \geq 2)$ tels que $a \equiv 1[n]$. Montrer que :

1. Pour tout diviseur d de n, $a \equiv 1[d]$. **(0,5pt)**
2. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$ $2^n \equiv 1[k]$, alors $2^a \equiv 2[k]$. **(0,5pt)**

II. 1. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, 2^{3n} - 1$ est multiple de 7 ; et en déduire que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7. **(0,75pt)**

2. En déduire les restes de la division euclidienne de 2^n par 7.
3. On pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$; résoudre l'équation $A_n \equiv 0[7]$. **(0,5pt)**
4. Montrer que si n n'est pas multiple de 3 alors $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 0[31]$. **(0,5pt)**

III. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} a + b = 135 \\ PGCD(a, b) = 504 \end{cases}$. **(0,75pt)**
2. $\begin{cases} PPCM(a, b) = 1680 \\ PGCD(a, b) = 42 \end{cases}$. **(1pt)**

Exercice 2 : 3,25 pts

I. On pose $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

1. Donner la forme algébrique de z^2. **(0,5pt)**
2. Ecrire z^2, puis z sous forme exponentielle. **(0,5pt)**
3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{8}$ et de $\sin\frac{7\pi}{8}$. **(0,5pt)**

II. Le plan complexe est rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. ***Prendre pour unité 2cm.***

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0$. **(0,5pt)**
2. Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 + i$ et $z_B = 2i$, à tout nombre complexe $z \neq 2i$ on associe le nombre complexe $z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$.

a. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M d'affixes z tels que $|z'| = 1$. **(0,5pt)**

b. Soit $(\mathcal{F})$ l'ensemble des points M d'affixes z tels que $z' \in i\mathbb{R}$. Montrer que $B \in (\mathcal{F})$, puis déterminer et construire $(\mathcal{F})$. **(0,75pt)**

Exercice 3 : 7,25pts

I. *Pour chacune des 3 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.* ***Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.***

1. **Proposition 1** : « le chiffre des unités de $7^{9^{9^9}}$ est 2». **(0,5pt)**
2. **Proposition 2** : « Le chiffre des unités de $3548^9 \times 2537^{31}$est 1 ». **(0,5pt)**
3. **Proposition 3** : « $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $5^{6n+1} + 2^{3n+1} = 5k$ ». **(0,25pt)**
4. **Proposition 4** : « Si $\frac{a}{b}$ est irréductible alors $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ est l'est aussi.» **(0,5pt)**
5. **Proposition 5** : « $-\frac{\pi}{2}$ et 2 sont respectivement l'argument et le module de $\frac{5-5i}{10e^{\frac{i\pi}{4}}}$.» **(0,5pt)**

II.

On considère dans $\mathbb{C}$, le polynôme P définie par : $P(x) = 9z^4 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41$.

1. Montrer que si z_0 est une racine de , alors $\overline{z}_0$ est aussi une racine de P 0,5pt
2. Vérifier que i est une racine de P et en déduire l'autre racine de P. 0,5pt
3. Déterminer trois nombres complexes $a\,, b\ et\ c\ telsque\ \forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$ 0,75pt
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ 0.5pt
5. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$(unité graphique : 3cm). On désigne par A; B ; $C\ et\ D$ les points d'affixes respectives $z_A = -i$; $z_B = i$; $z_C = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i\ et\ z_D = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$

a) Placer les points A; B ; $C\ et\ D$ 0,75pt

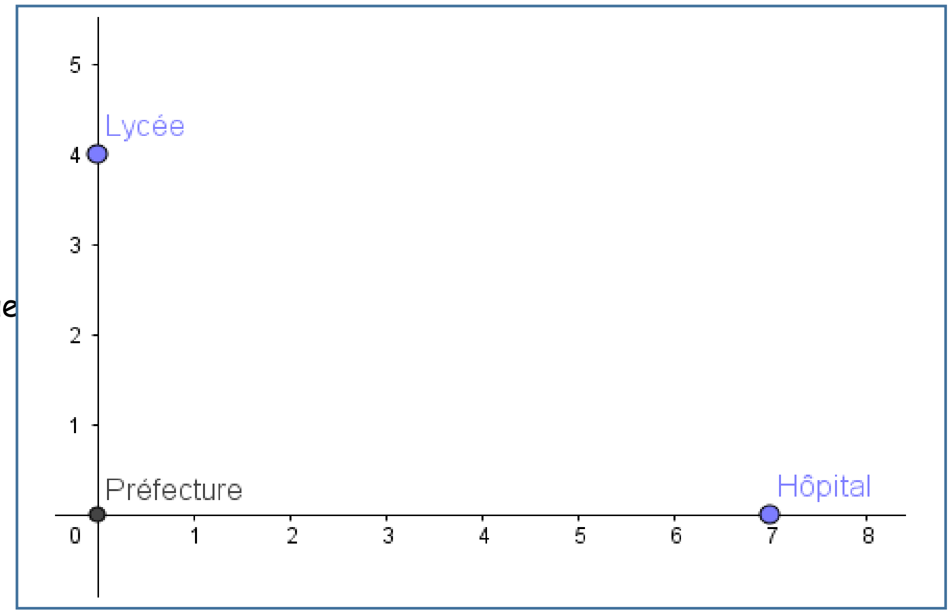
b) Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$ et $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in i\mathbb{R}$ où $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs. 1pt

c) En déduire la nature exacte des triangles $ACD\ et\ BCD$ 0,5pt

d) Montrer que les points A; B ; $C\ et\ D$ appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon 0.5pt

Partie B : Evaluation des compétences (4,5pts)

Une équipe d'ingénieurs désignée pour construire 3 forages dans un village a assimiler le village à un repère ainsi qu'indique la figure ci-contre. Après étude pour savoir les coordonnées des points des trois forages, les ingénieurs ont réalisé que l'un des forages sera situé sur l'axe reliant la préfecture et le Lycée ; et que les affixes de ces points sont solutions de l'équation (E)



$(E): z^3 + (-4 - 8i)z^2 + (-15 + 22i)z + 30 = 0$. Pour aspirer la boue, l'équipe d'ingénieurs utilise des tubes en métal vendus dans des boîtes de rangements par 5 et par 9. L'ingénieur en chef constate que s'il ne prend que des rangements par 5, il lui restera 3 tubes ;et s'il ne prend que des rangements par 9, il lui restera 2 tubes. Et fini par obtenir une quantité de tubes comprise entre 100 et 140.

Pour fêter l'arrivée du forage dans son voisinage, un habitant du village dispose de 10 000 $F\ CFA$ pour l'achat des bières qui coûtent 350 $FCFA$ chacune et des jus qui coutent 200 $FCFA$ chacun. Il doit dépenser la totalité de cette somme d'argent pour l'achat de ces deux types de boissons. Avec la présence de son voisin qui ne boit que de la bière et de sa femme qui ne boit que du jus, chaque participant a droit à une seule bouteille.

1. Déterminer les nombres possibles des bouteilles de bières et de jus qu'il peut acheter **(1,5pt)**
2. Déterminer par leurs coordonnées les positions des trois forages. **(1,5pts)**
3. Combien l'équipe d'ingénieurs a-t-elle commandé de tubes ? **(1,5pts)**