

	COLLEGE CHAMINADE B.P. 23 KARA-TOGO ANNÉE SCOLAIRE 2022-2023	Tél : +228/26 60 60 58 Fax : +228/26 60 01 58 email : collège@chaminade-kara.net Site web : www.chaminade-kara.net
COMPOSITION 1^{er} TRIMESTRE Classe de : T^{le}D	MATHS Coef. 03	Date : 30/11/2022. Durée : 4H

Exercice 1 : (4,5 points)

On considère polynôme P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $P(z) = z^3 - z^2 - (1+i)z - 2 + 2i$

- Montrer que P admet une racine réelle x_0 que l'on déterminera (0,5pt)
 - Déterminer deux nombres complexes α et β tels que : $P(z) = (z - x_0)(z^2 + \alpha z + \beta)$ (0,5pt)
 - Déterminer sous la forme algébrique les racines carrées du complexe $-3 + 4i$. (0,5pt)
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ (0,75pt)
- Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$; $b = i$ et $c = -1 - i$.

 - Placer les points A; B et C dans le plan complexe. (0,25pt)
 - Calculer le nombre complexes $q = \frac{a-b}{c-b}$ puis en déduire la nature du triangle ABC (0,5pt)
 - Soit R la rotation de centre B qui transforme A en C.
Déterminer l'angle θ de R puis déterminer son écriture complexe. (0,5pt)
- Soit S la similitude directe de centre C qui transforme A en B.

 - Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = \left(\frac{1+i}{2}\right)z - 1$. (0,5pt)
 - Déterminer le rapport λ et l'angle α de S . (0,5pt)

Exercice 2 (4,5 points)

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = 2i$. Soit f l'application de $\mathcal{P} \setminus \{A\}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$.

- Écrire z_A et z_B sous la forme trigonométrique. (0,5pt)
 - Placer les points A et B dans le plan complexe $\mathcal{P}$ (0,25pt)
- Calculer $(2 - i)^2$. (0,25pt)
 - Déterminer les points M d'affixe z tels que $f(M) = M$ (0,75pt)
- On pose $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$.

 - Montrer que
$$\begin{cases} x' = \frac{x^2 + y^2 - x - 3y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ y' = \frac{-x - y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \end{cases}$$
 (0,5pt)
 - Déterminer et construire sur la figure précédente, l'ensemble (δ) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel. (0,5pt)
 - Déterminer et construire sur la même figure, l'ensemble (γ) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. (0,5pt)
- Montrer que pour tout $z \neq 1 + i$, on a : $|z'| = \frac{BM}{AM}$ et $\text{Arg}(z') = \text{Mes}(\widehat{AMB})$ (0,5pt)
 - En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z'\overline{z'} = 1$. (0,25pt)
- Montrer que pour tout $z \neq 1 + i$, on a : $|z' - 1| \times |z - 1 - i| = \sqrt{2}$. (0,25pt)
 - En déduire l'image par f du cercle de centre A et de rayon R. (0,25pt)

Problème (11 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 2 - (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$.

1. (a) Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[, \quad g'(x) = -3x\sqrt{x^2 + 1}$. (0,5pt)
(b) Dresser le tableau de variation de g . (0,75pt)
2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; +\infty[$ et que $0,7 < \alpha < 0,8$. (0,5pt)
(b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$ (0,25pt)

Partie B

On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x+2}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Unité graphique 2 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f puis calculer les limites de f aux bornes de D . (1,25pt)
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus. (1pt)
3. (a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ (0,5pt)
(b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$ (0,75pt)
4. (a) Montrer que la droite $(\mathcal{D}) : y = -x + 3$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$. (0,5pt)
(b) Montrer que $\forall x > 0; \quad x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$. (0,25pt)
(c) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$. (0,5pt)
5. (a) Montrer que $f(\alpha) = \alpha^3 + 1$ (0,5pt)
(b) Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,18. (0,25pt)
6. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur $[0; +\infty[$. (0,75pt)
7. Déterminer la primitive F de f sur $[0; +\infty[$ qui prend la valeur 2 en 0 (0,5pt)

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

1. (a) Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser. (0,5pt)
(b) Dresser le tableau de variation de la réciproque h^{-1} de h (0,5pt)
2. (a) Calculer $h(1)$. La réciproque h^{-1} est-elle dérivable en $\sqrt{2}$? Si oui calculer $(h^{-1})'(\sqrt{2})$. (0,75pt)
(b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ de h^{-1} dans le même repère que la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (0,5pt)

"Si quelqu'un ne veut pas travailler, qu'il ne mange pas non plus." 2Th 3:10

*** † † † **BONNE COMPOSITION ET BON COURAGE!!!** † † † ***

"Le succès est la somme des petits efforts répétés jour après jour." L. R. Collier