Exercice 1 :

Soit n un entier naturel. On pose $E = 2n - 1$ et $F = 9n + 4$.

1- Démontrer que tout diviseur commun à E et F divise 17.

2- Déterminer l'ensemble D des diviseurs communs à E et F.

3- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $9x - 2y = -1$.

4- En déduire les valeurs de n, pour lesquelles $pgcd(E, F) = 17$.

5- Pour quelles valeurs de n, E et F sont-ils premiers entre eux.

Exercice 2 :

Soit g la fonction définie sur $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = 1 + cosx$.

1- Etudier les variations de g sur I et dresser son tableau de variation.

2- Justifier que g réalise une bijection de I vers $]1; 2[$.

3- Justifier que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable sur $]1; 2[$.

4- Déterminer $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ et $(g^{-1})'\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5- a) Montrer que $g'(x) = -\sqrt{2g(x) - (g(x))^2}$.

b) En déduire que pour tout $x \in]1; 2[$, $(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Exercice 3:

On considère dans l'ensemble C des nombres complexes, le système (S): $\begin{cases} x + y + z = -1 + 2i \\ xy + yz + xz = -2(1 + i) \\ xyz = 2 \end{cases}$

et le polynôme $P(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 - 2(1 + i)z - 2$.

1- Montrer qu'un triplet (a, b, c) est solution de (S) si et seulement si a, b et c sont des racines de P.

2- Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine réelle et une seule que l'on déterminera.

3- Résoudre dans C, l'équation $P(z) = 0$ et en déduire les solutions de (S)

Exercice 4:

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère l'endomorphisme f de E définit par $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$, $f(j) = f(\vec{k}) = \vec{j} + \vec{k}$.

1- a) Ecrire la matrice M de f dans la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

b) Montrer que $M^2 = 2M$.

2- f est-il un automorphisme de E ?

3- Déterminer $Kerf$ et Imf ; puis donner si possible une base de chacun de ces ensembles.

4- Montrer que $Kerf$ et Imf sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E.

5- Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. Montrer que $\vec{u} \in Imf$ équivaut à $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$.

Exercice 5 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$. A, B, C et D sont les points d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 6 + 2i$, $z_C = 7 + 5i$ et $z_D = 3 + 4i$.

1- Placer ces points dans le repère.

2- Justifier que ABCD est un parallélogramme.

3- On pose $a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$.

a) Donner la forme algébrique du nombre complexe a.

b) Justifier que $cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{7}{\sqrt{170}}$.

c) En déduire une valeur approché au degré près de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right)$.

4- On considère l'équation d'inconnue z suivante (E): $(1 + i)z^2 - (1 + 3i)z + 6 + 8i = 0$.

a) Montrer que résoudre (E) revient à résoudre (F): $z^2 - (2 + i)z + 7 + i = 0$.

b) En déduire les solutions de (E).

Exercice 6:

Soit p et q deux entiers relatifs premiers entre eux, n un entier naturel non nul. On considère le polynôme R tel que $R(x) = 6x^3 + 9x^2 + 5x + 1$.

1- Montrer que p et q^n sont premiers entre eux.

2- On suppose que la fraction $\frac{p}{q}$ est une racine de R.

a) Montrer que $p \in \{-1; 1\}$ et que q divise 6.

b) En déduire une racine de R, puis factoriser $R(x)$.

3- Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $R(x) \equiv 0[5]$.

4- Démontrer que pour tout entier relatif x, la fraction $\frac{2x+1}{3x^2+3x+1}$ est irréductible.

Exercice 7:

On donne les fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = -1 + \sqrt{1 + x^2}$ et $g(x) = \frac{x^2}{1+|x|}$. On désigne par $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ leur courbe respective.

1- a) Etudier la parité des fonctions f et g.

b) Calculer les limites de f et g en $+\infty$.

c) Justifier que les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.

2- a) Etudier les branches infinies à la courbe $\left(C_f\right)$ en $+\infty$.

b) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\left(C_g\right)$ en $+\infty$.

3- Etudier les variations de f et g sur $[0; +\infty[$ et dresser leur tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

4- a) Démontrer que pour tout réel x, on a : $1 + |x| \leq 1 + \sqrt{1 + x^2}$.

b) En déduire que pour tout réel x, $f(x) \leq g(x)$.

c) Etudier la position relative des courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$.

5- Construire dans un même repère les courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$.

Exercice 8 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 2$. Soient α un élément de $]0; \pi[$ et M le point d'affixe $z = 1 + e^{2i\alpha}$.

1- Montrer que M appartient à un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

2- Exprimer l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)$ en fonction de α. En déduire l'ensemble des points M du plan lorsque α décrit l'intervalle $]0;\ \pi[$.

3- Soit M' l'image de M par la rotation r de centre O et d'angle -2α, on désigne par z' l'affixe du point M'.

  a) Montrer que $z' = \bar{z}$.

  b) En déduire que M' appartient à (C).

4- On suppose que $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et on désigne par A' l'image de A par r. (C') est l'image de (C) par r et P est le symétrique de M par rapport à A.

  a) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

  b) Montrer que (C) et (C') se coupent en O et M'.

  c) Montrer que M' est le milieu du segment [A'P].

Exercice 9:

1- Soit a un nombre réel. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$.

2- On considère l'équation (1) dans $\mathbb{Z}^2$ d'inconnue x et y : $11x - 24y = 1$.

  a) Déterminer une solution particulière de (1).

  b) Déterminer l'ensemble des solutions de (1).

3- L'objectif de cette question est la recherche du pgcd de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

  a) Justifier que les nombres $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ sont divisible par 9.

  b) (n, m) désignant un couple d'entiers naturel solution de (1), montrer que l'on peut écrire $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$.

  c) Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.

  d) En déduire l'existence de deux entiers p et q tels que $(10^{11} - 1)p - (10^{24} - 1)q = 9$.

  e) Montrer que tout diviseur commun à $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ divise 9.

  f) En déduire alors le pgcd de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

Problème 1 :

Le général d'armé Salifou a entre 300 et 400 soldats qu'il désire amener en mission pour sécuriser la frontière contre d'éventuelles troubles. Il les répartit par groupe de 17 soldats, il lui en reste 9 soldats ; mais quand il fait des groupes de 5 soldats, il lui en reste 3 soldats.

Pour cette mission, chaque soldat reçoit une prime journalière de 1500 francs s'il passe la nuit au campement ou alors 2000 francs s'il passe la nuit en brousse. L'un des soldats Hamir, se rappelle avoir reçu une prime de 31000 francs et qu'il a fait entre 10 et 16 jours de mission.

Pendant la mission, pour conserver la confidentialité des messages échangés par les troupes, les messages sont alors codés. On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier naturel $\boldsymbol{x}$: par exemple à A on associe 0, à B on associe 1, à C on associe 2 et ainsi de suite jusqu'à Z qui est associé à 25. Ensuite à x on associe l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $(\overline{11^2})^x$ par 26. Enfin à y on associe la lettre correspondante. Le Général a envoyé le mot STYLO.

Tâches

1- Quel est le mot reçu du général par les troupes ?

2- Combien de soldats dispose le général Salifou ?

3- Combien de jours de mission le soldat Hamir a-t-il passé en brousse ?

Exercice 10 :

ABC est un triangle tel que $AB = AC = a$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}$, a est un nombre réel strictement positif. D est le symétrique de A par rapport à B, O est le milieu de [CD] et (C) est le cercle de diamètre [CD]. On désigne par f la similitude directe qui transforme D en B et B en C.

1- a) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

b) Déterminer le rapport k et l'angle α de f.

c) Ω est le centre de f. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega C}}) = \frac{\pi}{2}$ (1) et que $\Omega C = 2\Omega D$ (2)

2- a) A l'aide de (1), démontrer que $\Omega \in (C)$.

b) A l'aide de (2), démontrer que $\Omega D = a$ et en déduire que $\Omega B = BC$.

3- a) Démontrer que (OB) est la médiatrice de $[\Omega C]$.

b) Quelle est la nature de $CAD\Omega$?

c) Placer Ω.

4- On pose $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AC}$.

a) Démontrer que $(A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé.

b) Déterminer les affixes des points B, C et D dans ce repère.

c) Donner l'écriture complexe de f.

d) En déduire l'affixe du point Ω.

Exercice 11:

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soit F et G des sous espaces vectoriels de E tels que : $F = \{f \in E;\ \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$ et $G = \{f \in E;\ \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$.

1- Montrer que $F \cap G = \{0\}$.

2- Soit $h \in E$. On pose $f_1(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2}$ et $g_1(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{2}$. tel que $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

a) Montrer que $f_1 \in F$ et $g_1 \in G$.

b) Déterminer les réels α et β tels que $h = \alpha f_1 + \beta g_1$.

3- Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires d E.

Exercice 12:

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$, avec $z \neq -2i$.

Soient E l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $f(z)$ soit réel et F l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. A et B sont les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$.

1- f admet-elle des points invariants ?

2- En posant $z = x + iy$, déterminer la partie réelle X et la partie imaginaire Y de $f(z)$.

3- Déterminer alors les ensembles E et F.

4- Détermination géométrique de E et F.

a) Donner une interprétation géométrique de $|f(z)|$ et $arg(f(z))$.

b) Déterminer les ensembles E et F.

c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 2$.

5- a) Calculer : $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$.

b) En déduire l'ensemble des points M' d'affixe $f(z)$, lorsque le point $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 13 :

On considère les nombres $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$.

1- Montrer que pour tout entier naturel $n > 1$, $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ où a_n et b_n sont des entiers naturels.

2- Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3- a) Etablir que $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ et que $a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = 1$.

b) En déduire que $pgcd(a_n, b_n) = pgcd(a_n, a_{n+1}) = pgcd(b_n, b_{n+1}) = 1$.

Exercice 14 :

A- Soit P le plan muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité graphique 2 centimètres. Soient f_1 et f_2 les fonctions de IR vers IR définies par : $f_1(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $f_2(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$. (C_1) et (C_2) désignent les représentations graphiques des fonctions f_1 et f_2 respectivement, dans le repère R.

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1 sur IR. Préciser les demi tangentes à (C_1) aux points d'abscisses -1 et 1.

2- Etudier les variations de f_1 et dresser son tableau de variation.

3- Etudier les branches infinies de (C_1).

4- Tracer (C_1).

B- Soit (C) la courbe d'équation $y^2 - 2xy + 1 = 0$ et s désigne la symétrie de centre O.

1- Montrer que $s(C_1) = (C_2)$.

2- Tracer (C_2) dans le repère R.

3- Prouver que $(C) = (C_1) \cup (C_2)$.

4- Soit le vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

a) Montrer que $(O, \vec{\imath}, \vec{u})$ est un repère du plan P.

b) Déterminer une équation de (C) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{u})$.

Problème 2 :

Pour la construction de son nouveau siège, l'INS (Institut National de Statistiques) a acheté un terrain de forme rectangulaire dont les coordonnées géodésiques des sommets sont les points images des solutions de l'équation $[z^2 + (-20 + 40i)z - 300 - 1200i][z^2 + (40 - 20i)z + 300 - 1200i] = 0$. L'unité de longueur est le mètre. L'INS engage un ingénieur en bâtiment pour clôturer la parcelle, celui-ci propose un devis 17 225F par mètre de mur tout en prévoyant une ouverture de 5m pour un portail estimé à 1 002 500F.

La cellule de crise du suivi de la pandémie du COVID19 de l'INS a publié les données du tableau ci-dessous, où x_i est le nombre de cas confirmés et y_i le nombre de guérisons, pour les mois de février à juillet 2020 et en rappelant que le nombre de guérisons dans cette ville en octobre 2020 était de 27.

Mois	***Février***	***Mars***	***Avril***	***Mai***	***Juin***	***Juillet***
$\boldsymbol{x_i}$	450	480	495	510	525	540
$\boldsymbol{y_i}$	26	27	29	31	32	35

Paul, élève d'une classe de Tle D voudrait par la méthode des moindres carrés estimer le nombre de guérisons durant ce mois d'octobre 2020.

Un problème ne surgissant jamais seul, l'agence Spatial américaine NASA localise une comète se dirigeant suivant la courbe de la fonction $f: \mapsto 3 + \sqrt{x}$ vers la planète terre et, programme alors le lancement d'un missile longue portée suivant la direction de la courbe de la fonction $g: x \mapsto 2x^2$.

Tâches

1- Aider Paul à donner cette estimation du mois d'octobre.

2- Déterminer le montant total du devis présenté par l'ingénieur.

3- Est-il possible que le missile intercepte la comète ?

Exercice 15 :

1- Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 (sous la forme trigonométrique) satisfaisant aux conditions : $\begin{cases} z_1.z_2 = 0{,}5 \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$.

2- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit θ un nombre réel de l'intervalle $]0; 2\pi]$. On considère le point M du plan complexe d'affixe z et le nombre complexe $Z = \frac{1+z}{1-z}$. On sait en plus que le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

a) Montrer que $Z = icot\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

b) Déterminer le module et un argument de Z.

c) Pour quelles valeurs de θ l'argument de Z est-il défini ?

Exercice 16:

On considère les ensembles suivants $F: \{(x, y, z, t) \in E; x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(2a, -a, 0, a); a \in \mathbb{R}\}$. E étant un espace vectoriel réel de dimension 4.

1- Montrer que F est un sous espace vectoriel.

2- Démontrer que $F + G$ est une somme directe.

3- Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer le réel a tel que le vecteur $(x - 2a; y + a; z; t - a) \in F$.

4- En déduire que F et G sont deux sous espace vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 17:

Soit A l'ensemble des entier naturels de l'intervalle $[1;\ 46]$.

1- On considère l'équation suivante $(E): 23x + 47y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer une solution particulière (x_0, y_0) de (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E).

c) En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1[47]$.

2- Soient a et b deux entiers relatifs.

a) Montrer que si $ab \equiv 0[47]$ alors $a \equiv 0[47]$ ou $b \equiv 0[47]$.

b) En déduire que si $a^2 \equiv 1[47]$ alors $a \equiv 1[47]$ ou $a \equiv -1[47]$.

3- Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1[47]$.
Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$ appartenant à A tel que $p \times inv(p) \equiv 1[47]$.

4- Déterminer par exemple : $inv(1), inv(2)$ et $inv(3)$.

5- Montrer que $46! \equiv -1[47]$.