REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****
REGION DE L'OUEST
****
DELEGATION DEPARTEMENTALE DE LA MIFI
****
LYCEE BILINGUE DE TOUGANG II B.P : 1033
BAFOUSSAM II
****
Email : lytougang2@ahoo.com
N° IMMATRICULATION : 4KE1GSFD110495106

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace – Work – Fatherland
****
WEST REGION
****
DIVISIONAL DELEGATION OF MIFI
****
G.B.H.SCHOOL TOUGANG II P.O Box : 1033
****
Email : lytougang2@ahoo.com
N° IMMATRICULATION : 4KE1GSFD110495106

Examen de fin de Deuxième Séquence — **Classe de Tle C**
Novembre 2022 — **Durée : 4h**
Proposé par : TSOMENE Barthelemy — **Coef : 6**

Partie I : Evaluation des ressources **/13,25pts**

Exercice 1 :

A/ 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $-4x+5y=4$ /0,5pt

2) Un nombre a s'écrit $\overline{47}$ dans le système de base x et $\overline{53}$ dans le système de base y. Un nombre b s'écrit $\overline{144}$ dans le système de base x et $\overline{171}$ dans le système de base y.
Déterminer les entiers naturels a, b, x et y /0,75pt

B/ 1) Montrer que les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $29x-13y=6$ (E) sont $x=2+13k$ et $y=4+29k$ avec $k\in\mathbb{Z}$ /0,25pt

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^{19}\equiv -2[29]$ (E′)

2) justifier que $2^{28}\equiv 1[29]$ et en deduire que -8 est solution de (E′) /0,5pt

3) Soit x_0 une solution de (E′)

a) Montrer que $x_0^{28}\equiv 1[29]$ /0,25pt

b) Montrer que $x_0^{57}\equiv -8[29]$, puis que $x_0\equiv -8[29]$ /0,5pt

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E′). /0,25pt

d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x-3)^{19}\equiv -2[29]$ /0,25pt

4) Déduire dans $\mathbb{Z}$ les solutions de l'équation $\begin{cases}(x-3)^{19}\equiv -2[29]\\(x-3)^{13}\equiv -2[13]\end{cases}$ /0,5pt

Exercice 2

A/ Dans tout l'exercice, le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$
On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\frac{z-2+i}{iz+1}$. Soient les points A et B d'affixes respectives $2-i$ et i

1) Calculer $z'+i$ en fonction de z puis déterminer l'image par f du cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon $2\sqrt{2}$ /0,5pt

2) Déterminer le lieu des points M' lorsque M décrit la médiatrice de $[AB]$ /0,5pt

3) a) Démontrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM'},\vec{u}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ /0,25pt

b) Déduire que si M est un point du cercle de diamètre $[AB]$ privé des point A et B, alors M' est un point de l'axe des réels /0,5pt

B/

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2\sqrt{2}z+2+2i=0$ (E) /0,5pt

b) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E) /0,5pt

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Unité : 1 cm

On donne $z_0=1$ et pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+1}=\frac{\sqrt{2}-1+i}{2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}}z_n$. B_n est le point d'affixe z_n

2.1) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n=e^{i\frac{3n\pi}{8}}$ /0,5pt

b) Déterminer les couples d'entiers naturels (x,y) tels que $3x-16y=4$ /0,5pt

c) Déduire les valeurs de n pour lesquelles le point B_n est situé sur l'axe des imaginaires /0,25pt

2.2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel k, $\frac{z_{k+1}-z_k}{z_k}=2\sin\frac{3\pi}{16}\,e^{i\frac{11\pi}{16}}$ /0,5pt

b) Déduire que pour tout entier naturel k, $B_kB_{k+1}=\left(2\sin\frac{3\pi}{16}\right)OB_k$ /0,25pt

c) Pour tout entier naturel n, on pose $L_n=B_0B_1+B_1B_2+\cdots\ldots+B_{n-1}B_n$
Exprimer L_n en fonction de n /0,5pt

Exercice 3

I/ Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos^2 x$

1) Montrer que f admet une réciproque f^{-1} /0,5pt

2) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ /0,5pt

3) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable , puis montrer que $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x - x^2}}$ /0,5pt

II/ Soit f une fonction définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé où l'unité est $1\ \text{cm}$

1) a) Préciser l'ensemble de définition de f ainsi que les limites à ses bornes /0,75pt

b) Etudier les branches infinies de f et interpréter les résultats /0,5pt

2) a) Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1 , puis interpréter les résultats /0,75pt

b) Justifier que pour tout réel x de $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}$. /0,25pt

Déduire le sens de variations de f , puis dresser le tableau de variations de f /0,75pt

c) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ de f /0,5pt

3) On désigne par h la restriction de f à $]1 ; +\infty[$.

a) Montrer que h admet une réciproque h^{-1} dont on donnera le tableau de variations /0,5pt

b) Pour tout réel x de $]1 . +\infty[$, expliciter $h^{-1}(x)$ /0,5pt

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de h^{-1} dans le même repère /0,5pt

Partie II : Evaluation des compétences /06,75pts

A , B et C sont trois villages voisins traversés par deux routes perpendiculaires L_1 et L_2 formant un carrefour dans un quartier O . L_1 est verticale et L_2 horizontale .

Les responsables des trois villages ont décidé de créer un grand puits pour palier au manque d'eau . Ils veulent que ce puits soit situé au centre du triangle formé par les centres de ces trois village . Le village A étant situé sur la route L_1 et ces routes étant prises comme repère orthonormé complexe d'origine O dans lequel l'unité est $10\ km$, les affixes z_A , z_B et z_C de ces villages sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 3(3 + 2i)z^2 + 2(11 + 12i)z + 12(1 - 5i) = 0$ (E) . Le responsable du village A doit envoyer 24 travailleurs sur le site de création du puits et le cout du transport de chacun est de 50 FCFA au kilomètre .

Des études antérieures ont montré que les besoins maximaux en eau de ces trois communautés sont une fonction du temps t (en jours) définie par $v(t) = -6t + (t + 9)\sqrt{t}$ (en dizaines de m^3) . Forts de cette donnée , les entrepreneurs pris en charge veulent créer un puits cylindrique plein en tout temps , dont le rayon (en m) est la valeur approchée à 10^{-1} près de l'unique solution de l'équation $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$.
Sa profondeur (en mètres) est la limite en 1 de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{5x^6 - 6x^5 + 1}{x^4 - x^3 - x + 1}$. Les trois chefs ont décidé de vendre la terre creusée à raison de 60 000 FCA le m^3 pour amortir la dépense due à la construction de ce puits

Pour mener à bien ces travaux , l'entrepreneur a besoin d'engager a techniciens $(a > 5)$ tel que la fraction $\frac{2a^2 + 5a + 15}{a + 2}$ soit un entier naturel , parmi lesquels b hommes tels que $\text{PPCM}(3b - 2 ; 4b + 3) = 589$
Chaque homme technicien sera payé à 7 500 FCFA et chaque femme à 6 000 FCFA . Mais seulement parmi les hommes , il faudra n techniciens prospecteurs tel que n soit le reste de la division euclidienne de $3^{371} + 2^{173}$ par 13 et chacun d'eux sera payé double .

Tâches :

1) Quelle est la somme que le responsable du village A doit payer pour le transport de ses travailleurs /02,25 pts

2) Quelle est la somme que les trois responsables recevront pour amortir les dépenses dues à ces travaux. Ce puits est-il conforme aux attentes ? /02,25 pts

3) Quelle est la somme que les entrepreneurs devront prévoir pour payer les techniciens recrutés /02,25pts