MINESEC
Lycée de Garoua Djamboutou
Département de Mathématiques

Année scolaire 2021/2022
Classe : $T^{\text{le}}C$
Durée : 3 hrs 00 m Coef :7

Épreuve de Mathématiques

Evaluation intermédiaire du trimestre 1

Evaluation des ressources: 15 points

Exercice 1: 2,25 points

Soit l'équation (E) à variable complexe z tel que: $z^4 - 3z^3 + 4,5z^2 - 3z + 1 = 0$.

1) Montrer que si z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E), puis que si z_0 est solution de (E) alors $\frac{1}{z_0}$ est aussi solution de (E). **1 pt**

2) Montrer que $1 - i$ est une solution de (E). **0,5 pt**

3) En déduire les autres solutions de (E). **0,75 pt**

Exercice 2: 3,5 points

On considère le polynôme P à variable complexe z défini par: $P(z) = z^3 - (1+4i)z^2 + (-5+5i)z + 6 + 6i$.

1) Montrer que le polynôme P admet une racine réelle que l'on déterminera. **1 pt**

2) Déterminer les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$. **0,75 pt**

3) On suppose que $a = 1 - 4i$ et $b = -3 - 3i$.

Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-3 + 4i$. **0,75 pt**

4) En déduire dans $\mathbb{C}$ la resolution de l'équation (E) : $z^3 - (1+4i)z^2 = (5-5i)z - 6 - 6i$. **1 pt**

Exercice 3: 4,75 points

1) Calculer limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^4 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 3x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2 - 2x + 4} - 3x + 1$; **c)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin 4x}$. **1,5 pt**

2) Montrer que l'équation $x \sin x = x^2 - \cos x$ admet deux solutions rélles distinctes. **1,5 pt**

3) Démontrer que pour tout nombre réel $a \in [0; \frac{\pi}{4}]$, on a: $a \leq \tan 2a \leq 2a$. **1 pt**

4) Soit f l'application de $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$ vers $[-1; 0]$ définie par: $f(x) = \cos x$.

a) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1}. **0,5 pt**

b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et démontrer que $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **0,75 pt**

Exercice 4: 4,5 points

1) Soit $a = bq + r$ représentant la division euclidienne de a par b. Calculer q sachant que q et r restent invariant si l'on augmente a de 52 et b de 4. **0,75 pt**

2) Un nombre N s'écrit $\overline{x32y}^4$. Déterminer x et y pour que N soit divisible par 3 et par 2. **0,75 pt**

3) Démontrer en utilisant les congruences que $\forall n \in \mathbb{N}$, $17^{4n} + 3 \times 9^{2n+1}$ est un multiple de 7. **0,75 pt**

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$. **1 pt**

5) On se propose de déterminer les entiers relatifs n tels que $\dfrac{n(5n+8)}{2n-1}$ soit une fraction irréductible.

a) Enoncé le théorème de Gauss et montrer que $2n - 1$ divise $5n + 8$. **0,5 pt**

b) En déduire les valeurs entières de n pour lesquelles $\dfrac{n(5n+8)}{2n-1}$ est irréductible. **0,75 pt**

Evaluation des compétences: 5 points

Résoudre une situation problème, déployer un raisonnement mathématique et communiquer à l'aide du language mathématique dans des situations de vie où interviennent: Le ppcm, le pgcd de deux entiers naturels et les équations diophantiennes.

Une sociètè de fabrication de bonbons produit des bonbons de type A et de type B, à l'aide de deux machines M_1 et M_2 respectivement. Le nombre journalier de bonbons produit par les deux machines est 161 161. On démarre les machines chaque 6h30 min et chaque machine a un temps bien précis de production de bonbons. L'écart de production entre les deux machine est de 30 mins dès le démarrage. A 21h 30mins exactement, elles produisent simultannément les bonbons.

La société conçoit les bonbons par paquet identique contenant les mêmes nombres de bonbons de types A et B. Elle a fait un nombre maximal de 1001 paquets sachant que dans un paquet, le nombre de bonbons de type A est compris entre 50 et 70, et celui de type B est compris entre 80 et 100, et vent à 15 FCFA et 10 FCFA les bonbons de types A et B respectivements.

Chaque samedi soir, un agent d'entretien range un certain nombre de paquets de bonbons dans deux espaces. Pour l'espace 1, il fait des blocs de 49 paquets reste 1 et pour l'espace 2; il fait des blocs de 81 et il en reste 70. Le nombre de paquets rangé est compris entre 2400 et 2600.

1. Déterminer en heure les temps de production respectifs des machines M_1 et M_2. **1,5 pt**
2. Déterminer le prix de vente d'un paquets de bonbons. **1,5 pt**
3. Déterminer le nombre de paquets de bonbons rangés chaque samedi soir. **1,5 pt**

Présentation 0,5 pt

"Ce n'est pas le plus fort de l'espèce qui survit, ni le plus intélligent, mais le plus apte au changement."Charles Darwin
Travaillez, travaillez, travaillez encore et travaillez par vous même.

Evaluation intermédiaire du trimestre 1, Maths T^{les}C/Lygradjam/ Octobre 2021

Examinateur: M Ferdinand MAKAINI, PLEG Mathématiques