

# COLLEGE PRIVE LAÏC YMELE

Examen	Epreuve	Coef	Durée	Classe	Année Scolaire
Evaluation 4	Mathématiques	04	4h00	TleD	2022/2023

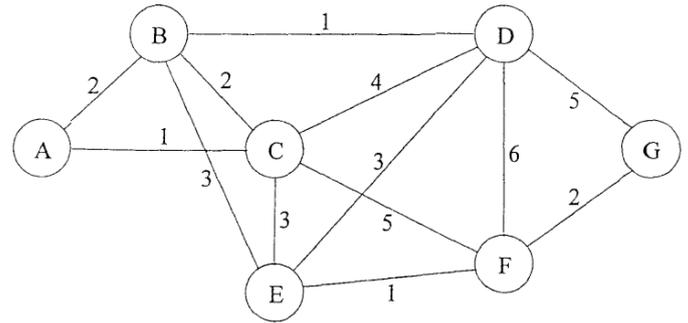
La présentation et le soin apportés à la copie seront pris en compte dans l'évaluation de la copie.

## PARTIE A : Utilisation des ressources

(15 points)

### Exercice 1 : Calcul intégral et Graphe / 3pts

- Définis : intégrale d'une fonction continue  $f$  sur l'intervalle réel  $[2; 7]$  ; unité d'aire ; unité de volume. 1pt
- Calcule la valeur moyenne de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 3x^2$  sur l'intervalle  $[0; 4]$ . 0,5pt
- Une particule se déplace le long de l'axe  $(Ox)$  à la vitesse  $v(t) = 4t + 3$ .  $t = 0$ , la particule se trouve au point d'abscisse 2. Détermine la position  $x(t)$  de la particule à un instant  $t$ . 0,5pt
- Le graphe ci-contre est la carte d'un quartier. Les lettres désignent les noms des carrefours de ce quartier et les chiffres, les distances en km. Aide Priscar, jeune électricien à ressortir le plan de câblage optimal pour électrifier tous les carrefours de ce quartier. On précisera le nombre minimum de mètres de câbles à utiliser. 1pt



### Exercice 2 : équations -inéquations & systèmes- transformations du plan / 5pts

- Le  $pH$  d'une solution mesure le degré d'acidité d'une solution, il est défini par  $pH = -\log[H_3O^+]$  où  $[H_3O^+]$  désigne la concentration de  $H_3O^+$ . La concentration en  $H_3O^+$  d'une solution est  $2 \times 10^{-9}$ .  
Sans utiliser la calculatrice, dis si la solution est acide ( $pH < 7$ ) ou basique ( $pH > 7$ ).  
0,5pt
- Résous dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $\left(\frac{z+2}{3}\right)^3 + \left(\frac{z+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{z+2}{3}\right) + 1 = 0$ . 1pt
- Résous dans  $\mathbb{R}^2$  le système d'équations :  $\begin{cases} 4e^{\sqrt{x}} + e^{2y} = 8 \\ e^{\sqrt{x}} - 3e^{2y} = -11 \end{cases}$ . 0,75pt
- Résous dans  $\mathbb{R}$  l'équation et inéquation suivantes : 1,5pt
  - $\ln(x-1) = \ln(x+2) + \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$
  - $(2x-10)(\ln x - 4)(\ln x + 3) > 0$
  - $2^{2x+6} = 8^x \times 3^{x+2}$
- Détermine la nature et les éléments caractéristiques des transformations d'écritures complexes : a)  $z' = z + 2 - i$  ; b)  $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$  ; c)  $z' = -3z + 8 - 12i$ . 1,25pt

### Exercice 3: Calcul intégral-fonctions logarithme et exponentielle-suites numériques/7pts

I/ 1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $[1; +\infty[$  par  $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$

- Démontre que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur  $[1; +\infty[$  une unique solution notée  $\alpha$ . 0,75pt
- Démontre que  $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$ . 0,25pt
- Etudie et trace dans un repère orthonormé,  $(\Gamma)$  la courbe représentative de la fonction numérique  $h: x \mapsto \ln(2x) + 1$ . 1,25pt

- Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$ .

<http://sujetexa.com>

a- En utilisant la courbe  $(\Gamma)$ , construis sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite  $(u_n)$ . 0,5pt

b- Démontre que pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ . 0,5pt

c- Démontre que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ . 0,5pt

II/ On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = (x - 1)e^{1-x}$ .

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé.

1. Etudie et trace  $(C)$  la courbe représentative de la fonction numérique  $f$ . 1,25pt

2. Pour tout nombre réel  $x$  supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x (t - 1)e^{1-t} dt.$$

a- Démontre que la fonction  $F$  est dérivable et croissante sur  $[1; +\infty[$ . 0,75pt

b- Montre à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel  $x$  appartenant à  $[1; +\infty[$ ,  $F(x) = -xe^{1-x} + 1$ . 0,75pt

c- Démontre que sur  $[1; +\infty[$ , l'équation  $F(x) = \frac{1}{2}$  est équivalente à l'équation  $\ln(2x) + 1 = x$ . 0,5pt

3. Soit un réel  $a$  supérieur ou égal à 1. On considère la partie  $A_a$  du plan limitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = a$ .

Détermine  $a$  tel que l'aire, en unités d'aires, de  $A_a$  soit égale à  $\frac{1}{2}$  et hachure  $A_a$  sur le graphique. 0,75pt

## PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES

(4,5 points)

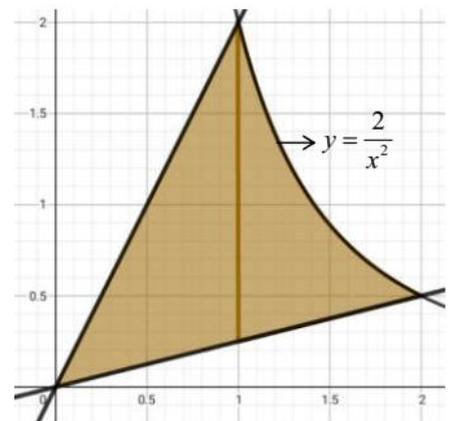
Etre capable de déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématique en faisant appel au calcul intégral et aux nombres complexes et à la régression linéaire pour évaluer un budget.

Monsieur L, riche homme d'affaire, dispose de deux parcelles

- La parcelle 1 est donnée par la représentation graphique ci-contre
- Le terrain 2 a une forme telle que la représentation dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé est définie par l'ensemble des points  $M(z)$  tels que :

$$\arg\left(\frac{z-4-2i}{z-2i}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Il compte cultiver le poireau sur la parcelle 1 et le haricot sur la parcelle 2. Un mètre carré de semence de poireau coûte 5000 frs tandis qu'un mètre carré de semence de haricot coûte 650 frs.



Parcelle 1

L'une des entreprises de monsieur L a mis au point un nouveau produit et cherche à fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où  $y_i$  représente le nombre d'exemplaires du point que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente exprimé en milliers de francs, est  $x_i$ .

Prix en milliers de francs CFA ( $x_i$ )	60	80	100	120	140	160	180	200
Nombre d'exemplaires ( $y_i$ )	952	805	630	522	510	324	205	84

Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25000 francs. Monsieur L sollicite les services d'un économiste afin qu'il lui propose l'expression du bénéfice  $B$  réalisé fonction du prix de vente  $x$ , et une estimation du prix de vente  $x$  (à  $10^{-2}$  près) permettant de réaliser un bénéfice. Après ses calculs, l'économiste lui donne l'expression de la fonction bénéfice :

$B(x) = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5$  et le rassure qu'il pourra réaliser un bénéfice maximum de 25 532 628 francs.

 **Benefice = Prix de vente - prix de revient**

**Prendre** : une unité de longueur égal à 10m.

### **Tâches :**

1. Quel budget doit prévoir monsieur L pour la culture du haricot ? 1,5pt
2. Quel budget doit prévoir monsieur L pour la culture du poireaux ? ? 1,5pt
3. Les propos de cet économiste sont-ils corrects ? 1,5pt

***LPK a dit « Travaillez avec beaucoup d'engouement. C'est au bout de l'effort qu'on récolte les bons fruits de son travail. »***