

## Épreuve de Mathématiques

*L'épreuve est sur deux pages, deux grandes parties A et B toutes obligatoires. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.*

### PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 PTS

#### Exercice 1 : 06 points

1. Soit le polynôme  $P(z) = z^3 - (1 - i)z^2 + z - 1 + i$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .
  - (a) Montre que  $P(z)$  admet deux racines imaginaires pures que tu détermineras. **0,75pt**
  - (b) Résoudre alors dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ . **0,5pt**
  - (c) Le plan est muni du repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On note  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectifs  $a = -i$ ,  $b = i$  et  $c = 1 - i$ . Soient les points  $D$  et  $E$  d'affixes  $d$  et  $e$ .
    - i. Faire une figure, que tu complèteras au fur et à mesure. **0,25pt**
    - ii.  $C$  est l'image du point  $D$  par la translation de vecteur  $\vec{AB}$ . Détermine  $d$ . **0,5pt**
    - iii.  $E$  est l'image de  $D$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Trouve  $e$ . **0,5pt**
2. On veut que tu détermine les couples  $(n, m)$  d'entiers naturels non nuls vérifiant l'équation  $(E)$  suivante;  $(E) : 7^n - 3 \times 2^m = 1$ .
  - (a) On suppose  $m \leq 4$ . Montre qu'il y'a exactement deux couples solutions de  $(E)$ . **0,5pt**
  - (b) On suppose maintenant que  $m \geq 5$ .
    - i. Montrer que si  $(n, m)$  vérifie l'égalité  $(E)$ , alors  $7^n \equiv 1[32]$ . **0,5pt**
    - ii. Étudies les restes de la division par 32 des puissances de 7. **0,75pt**
    - iii. Déduire que si  $(n, m)$  vérifie l'égalité  $(E)$ , alors 4 divise  $n$ . **0,5pt**
    - iv. En déduire que si  $(n, m)$  est solution de  $(E)$ , alors  $7^n \equiv 1[5]$ . **0,5pt**
    - v. Pour  $m \geq 1$ , existe-il des couples  $(n, m)$  solutions de  $(E)$ . **0,5pt**
  - (c) Déduire alors, l'ensemble des couples  $(n, m)$  solution de  $(E)$ . **0,25pt**

#### Exercice 2 : 03,5 points

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base d'un espace vectoriel  $E$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Pour tout réel  $\lambda$ , on considère l'ensemble  $E_\lambda = \{\vec{u} \in E; f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$ .

1.
  - (a) Démontre que  $E_\lambda$  est un sous espace vectoriel de  $E$ . **0,5pt**
  - (b) On suppose que  $f \circ f = 2f$ ; montre que  $\vec{u} \in \text{Im}(f) \iff u \in E_2$ . **0,75pt**
2. On suppose ici que :  $f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ ; et  $f(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = \vec{0}$ .
  - (a) Démontre que :  $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$ ,  $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$  et  $f(\vec{k}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ . **0,75pt**
  - (b) Détermine la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . **0,25pt**
  - (c) Montre que  $f \circ f = 2f$ . Compléter :  $\text{Im}(f) = \dots$  **0,5pt**
  - (d) Détermine par une de ses bases, le noyau  $\text{Ker}(f)$  de  $f$ ; et déduire  $\text{Im}(f)$ . **0,75pt**

### Exercice 3 : 02,5 points

On donne la série statistique suivante :

$x_i$	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$y_i$	13	12	14	16	a

où  $a$  est un entier naturel non nul. Par la méthode des moindres carrés, on a obtenu l'équation de la droite de regression de  $y$  en  $x$ , à savoir  $(D) : y = 9x + 0,6$ .

1. Complète par les expressions :  $x$ ,  $COV(X, Y)$ ;  $V(X)$ ;  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  le petit texte suivant :  
L'équation de la droite de regression de  $y$  en ... est donnée par  $y = ax + b$  avec :  $a = \dots\dots\dots$   
et  $b = \dots\dots - a(\dots\dots)$ . **0,75pt**
2. Détermine  $V(X)$  et déduire  $COV(X, Y)$  à partir de la droite  $(D)$ . **0,5pt**
3. Déduire  $\bar{X}$  et exprime  $\bar{Y}$  en fonction de  $a$ . **0,75pt**
4. En utilisant la question précédente montre que  $a = 20$ . **0,5pt**

### Exercice 4 : 03,5 points

Soit  $f$  la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ ; on note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, I, J)$ .  $D_f$  son ensemble de définition.

1. Montre que  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[$ ; et étudies les branches infinies à  $(C)$ . **0,75pt**
2. Étudie la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur son ensemble de définition. **0,75pt**
3. En déduire que  $(C)$  admet une demi-tangente parallèle à l'axe  $(OJ)$ . **0,25pt**
4. Étudies les variations de  $f$  et dresse son tableau de variation. **1,25pt**
5. Montre que la restriction de  $f$  à  $]-\infty; -1[$  notée  $h$  est une bijection et trouve  $h^{-1}$ . **0,5pt**

## PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES :04,5 PTS

L'évolution du chiffre d'affaire(en centaines de millions de Frs) de l'entreprise de Mr Bouba dénomé **SOTRA** en fonction du numéro de l'année est regroupée dans le tableau ci-dessous :

Années	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Numéro année	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaire	3,5	4,8	4,3	5	5,6	6,2

Mr Bouba désire prévoir son chiffre d'affaire pour les années avenir. Pour ce faire il contacte un technicien de la chose qui dit qu'il procèdera par la méthode de Mayer pour trouver un ajustement linéaire. À l'heure de pause un lundi, il y'a cambriolage à **SOTRA**. À la suite du vol, on interroge 4 temoins qui ont vu les bandits s'enfuir en voiture. Le premier dit que le numéro d'immatriculation comporte 4 chiffres. Le deuxième, que les deux premiers chiffres sont identiques. Le troisième que les deux derniers chiffres sont identiques. Le quatrième un élève en classe de terminale **C** a remarqué que le nombre en question est un carré parfait et que son chiffre des dizaines est compris entre 1 et 5 il dit en plus **un nombre dont les deux derniers chiffres sont impairs n'est jamais un carré parfait**.Après ce vol, Mr Bouba décide de mieux protéger **SOTRA**. Il décide alors d'acheter des fils electriques, pour installer le long de **SOTRA** qui a la forme d'une figure possédant 4 côtés, tel que les sommets de cette figure sont les points images solutions de l'équation  $(E) : z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$  (notre élève de terminale **C** affirme que pour résoudre  $(E)$ , on pourra déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $(E) \iff z^2[(z - 1/z)^2 + a(z - 1/z) + b] = 0$ ).

- Tache 1** : Donne une estimation du chiffre d'affaire de cette entreprise en 2035. **1,5pt**
- Tache 2** : Quel est le numéro d'immatriculation du véhicule des bandits. **1,5pt**
- Tache 3** : combien Mr Bouba dépensera pour l'achat de fils électrique. **1,5pt**