LYCEE DE BANGOULAP
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ANNEE SCOLAIRE 2022/2023
CLASSE : T[le] D EVALUATION N°4
DUREE : 4 H COEF : 4
PAR M. DJOUTSOP Emile

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE A : Évaluation des ressources

EXERCICE 01 : (04 points)

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases}$ et $v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$.

1. Calculer v_0. 0,25 pt
2. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont-on précisera la raison et le premier terme. 0,75 pt
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. 1 pt
4. Calculer la limite de v_n puis en déduire celle de u_n. 0,5 pt
5. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$.
   a) Démontrer que $S_n = (1-2^n)\ln 2$. 0,75 pt
   b) Justifier que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$, puis exprimer T_n en fonction de n. 0,75 pt

EXERCICE 02 : (04 points)

Une urne contient 8 boules blanches et 4 boules noires toutes indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément 4 boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a) Deux boules blanches et deux boules noires ? 0,5 pt
   b) Des boules de couleurs différentes ? 0,5 pt
2. On tire successivement et sans remise trois boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a) Exactement une boule blanche ? 0,5 pt
   b) Au moins une boule blanche ? 0,5 pt
3. Un jeu consiste à tirer successivement 3 boules de cette urne en remettant la boule tirée après chaque tirage. On gagne 100F par boule blanche tirée et on perd 75F par boule noire tirée. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu à l'issu de trois tirages.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X. 1 pt
   b) Calculer l'espérance mathématique de X. 0,5 pt
   c) Ce jeu est-il équitable ? Pourquoi ? 0,5 pt

EXERCICE 03 : (07,5 points)

Les parties A, B et C sont liées. Considérons la fonction f définie sur IR par $f(x) = x - (x^2+4x+3)e^{-x}$ de courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : Etude de la fonction g. 02,75 points

Soit la fonction g définie par $g(x) = (x^2+2x-1)e^{-x}+1$.

1. Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition. 0,5 pt
2. Calculer la dérivée $g'(x)$ de la fonction $g(x)$ puis dresser le tableau de variation de g. 1 pt

3. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions dont une est nulle et l'autre α dont-on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près. 1 pt
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur IR suivant les valeurs de x. 0,25 pt

Partie B : Etude de la fonction f. 04,75 points

1. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. 0,5 pt
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ puis dresser le tableau de variation de f. 1pt
3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe (C_f). 0,5 pt
4. Déterminer les points de rencontre de (C_f) et (D) ; puis déduire les positions relatives de (C_f) et (D). 1 pt
5. Construire la droite (D) et la courbe (C_f). 1 pt
6. Soit H la fonction définie sur IR par $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction H soit une primitive sur IR de la fonction $h(x)=(x^2+4x+3)e^{-x}$.

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES: (04,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{u},\vec{v})$. L'unité est le kilomètre. Madame NANA a fait une extension de sa plantation de banane dont un sommet est repéré son affixe $2+3i$ et les deux autres sont solutions de l'équation complexe $z^2+(2+3i)z-2(1-2i)=0$. Elle souhaite le clôturer à l'aide du fil barbelé dont le mètre coûte 550F.

La dépense totale pour l'entretien des bananiers, la main d'œuvre et diverses (en milliers de francs) avant la récolte est donnée par $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+207x+2586\ln(x+2)$ où x est le nombre de pieds de bananiers.

Madame NANA a regroupé dans un tableau la production moyenne y en tonne de son jardin en fonction du nombre d'années. Par calculs, elle désire à l'aide d'une droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés avoir une estimation de la production en tonne de sa production à la quinzième année en supposant que la tendance de production restera inchangée.

Année x_i	1	2	3	4	5	6
Production y_i en tonnes	12	13	15	19	21	22

Tâches :

1. Déterminer le coût total de la clôture de cette plantation. 1,5 pt
2. Déterminer le nombre de pieds de bananiers qu'il faut planter pour que le coût unitaire soit maximal. 1,5 pt
3. Déterminer une estimation de sa production à la quinzième année. 1,5 pt