Épreuve de Mathématiques

L'épreuve est sur deux pages, deux grandes parties A et B , toutes obligatoires. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 PTS

Exercice 1 : 03,5 points

On considère l'équation $(E) : [z^2 - 2(1+i)z + 4i][z^2 + 4z + 8] = 0$, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ de nombres complexes .On notera A , B , C et D les images des racines de (E) , dans le plan complexe telles que A et B ont même abscisse A et C ont même ordonnée

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . **0,75 pt**
2. Trouver l'écriture complexe de la similitude **S** où ; $S(A) = C$ et $S(B) = D$. **0,75 pt**
3. Déduire les éléments caractéristiques de S . **0,5 pt**
4. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = 2 + 3i$; on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = S(M_n)$ et $4U_n = ||\overrightarrow{IM_n}||$
   (a) Démontrer que $(U_n)_n$ est une suite géométrique . **0,75 pt**
   (b) Déduire les caractéristiques de U et Exprimer U_n en fonction de n . **0,5 pt**
   (c) Étudier la convergence éventuelle de la suite (U_n) . **0,25 pt**

Exercice 2 : 04,5 points

1. Démontrer en utilisant la récurrence que , $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
   (a) $1.2 + 2.3 + ... + h.(h+1) + ... + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. **0,75 pt**
   (b) $n^7 - n$ est divisible par 7 . **0,75 pt**
   (c) $1.(1!) + 2.(2!) + 3.(3!) + ... + n.(n!) = (n+1)! - 1$. **0,75 pt**
2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux .
   (a) Démontrer que $a + b$ et ab sont premiers entre eux . **0,75 pt**
   (b) Vérifier que : $a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab$. **0,25 pt**
   (c) Déduire que $a + b$ et $a^2 - ab + b^2$ sont soit étrangers soit divisible par 3 . **0,75 pt**
   (d) Montrer que $PGCD(a^2 - ab + b^2, a + b) = PGCD(a + b, 3)$. **0,5 pt**

Exercice 3 : 04 points

1. (a) Décomposer 18360 en produit de facteur premier et Trouver tous les entiers naturels dont le cube divise 18360 . **0,5 pt**
   (b) Déduire dans $\mathbb{N}$ la résolution de l'équation $b^3(b^2 + (b+1)^2) = 18360$. **0,75 pt**
2. Déterminer le chiffre des unités de $7^{7^{7^7}}$. **0,75 pt**
3. On souhaite déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$, vérifiant la relation (E) : $13 \mid 5^{2n} + 5^n$.
   (a) Déterminer les entiers naturels n tels : $5^n \equiv -1[13]$. **0,5 pt**
   (b) Montrer que si $13 \mid 5^{2n} + 5^n$ alors $5^n \equiv -1[13]$. **0,75 pt**

http://sujetexa.com

(c) Déduire que les entiers n vérifiant (E) sont de la forme $n = 4p + 2$ $(p \in \mathbb{N})$. **0,75 pt**

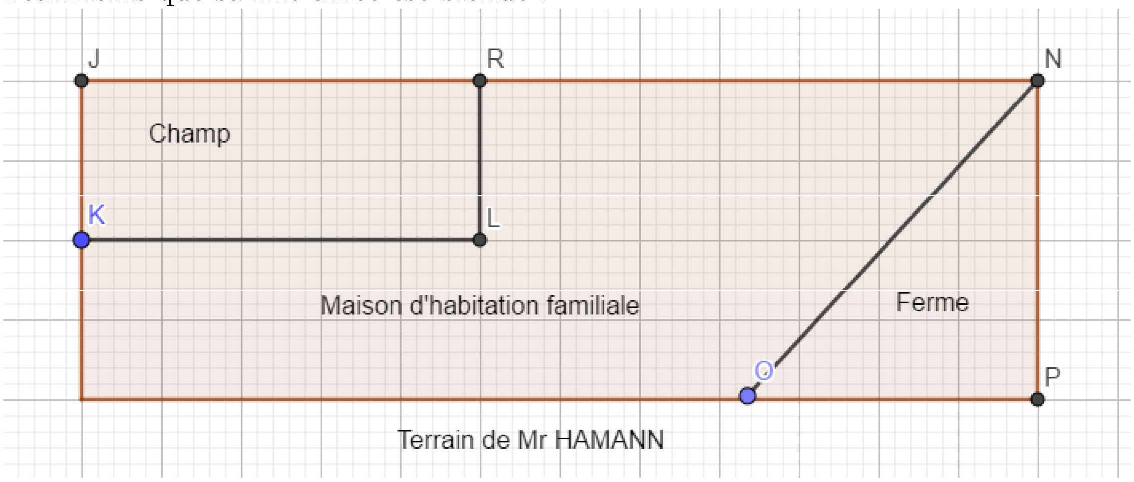
Exercice 4 : 03,5 points

Le plan complexe $\mathbb{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. On prendra pour unité graphique $4cm$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs $a = i$, $b = 1 + 2i$,$c = 1 + i$ et $d = 3 + 2i$. On considère la similitude directe **s** qui transforme A en B et C en D . Soit M et M' les points d'affixes respectifs z et z' tels que $s(M) = M'$.

1. Exprimer z' en fonction de z et déterminer les éléments caractéristiques de **s**. **0,75 pt**
2. Soit la suite numérique V définie par : $V_0 = 0$ et $V_{n+1} = 2V_n + 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, V_n et V_{n+1} sont premiers entre eux . **0,25 pt**
   (b) Interpréter en utilisant la similitude **s** les termes de la suite V . **0,25 pt**
   (c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = 2^n - 1$. **0,5 pt**
   (d) Montrer que $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq p$, $V_n = V_p(V_{n-p} + 1) + V_{n-p}$. **0,5 pt**
   (e) Déduire que $PGCD(V_n, V_p) = PGCD(V_p, V_{n-p})$. **0,25 pt**
   (f) Déduire que $PGCD(V_n, V_p) = V_{PGCD(n,p)}$ et calculer $PGCD(V_{2005}, V_{15})$. **1 pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES :04,5 PTS

Mr HAMMAN possède un terrain ayant une forme rectangulaire comme l'indique la figure ci-dessous . Se sentant un peu fatigué et sous le poids de l'âge il aimerait mieux protéger son champ et sa ferme par du fil électrique coutant 2500Frs le mètre .
Sa ferme ayant la forme d'un triangle rectangle OPN est image du triangle $O'P'N'$ par la similitude directe plane ayant pour écriture complexe $z' = (8 + 8i)z - i$; tels que $s(O') = O$, $s(P') = P$ (on donne $P'(-5, 0)$, $N'(0, 5)$ et $O'(0, 0)$) .
Les sommets R et K de son champ sont les points images solution de l'équation
(E) : $z^3 - (1 + i)z^2 - 2iz - 6 + i = 0$ avec $z_J = \overline{z_K}$ et $z_L = \overline{z_R}$ (avec z_K ayant une ordonnée positive) .
Dans sa maison familiale **Mr HAMANN** a oublié les âges de ses trois filles le produit de leurs âges est 36 et la somme de ces ages est le sixième plus petit entier naturel premier . Il se souvient néanmoins que sa fille ainée est blonde .



Taches :

Tache 1 : Combien dépensera **Mr HAMANN** pour entourer **son champ** . **1,5 pt**
Tache 2 : Combien dépensera **Mr HAMANN** pour entourer sa ferme . **1,5 pt**
Tache 3 : Quels sont les ages respectifs des trois filles de **Mr HAMANN** . **1,5 pt**

http://sujetexa.com