DIOCESE DE BAFOUSSAM
SECRETARIAT A L'EDUCATION
COLLEGE B. CATHOLIQUE St ABRAHAM
Département de Mathématiques

ANNEE SCOLAIRE : 2022 /2023
EVALUATION N°3 Janvier 2023
CLASSE: Tle D
DUREE: 4H COEF :4

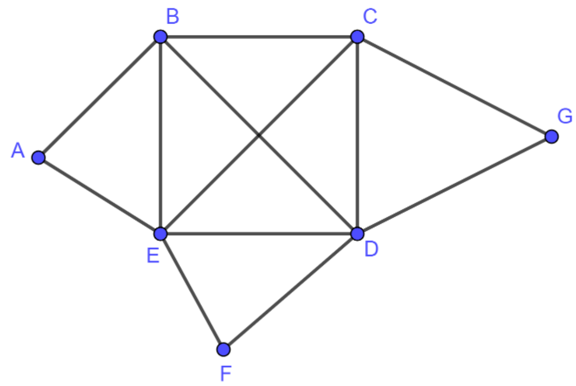
***Examinateur :* M. HIONG**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES :

PARTIE A : ÉVALUATION RESSOURCES (15 POINTS)

Exercice 1 : (5 points)

A/ Le graphe ci-contre indique, sans respecter d'échelle, les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise.



Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance. Ses temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont les suivants : AB : 16 minutes ; AE = 11 minutes ; BC = 12 minutes ; BD : 10 minutes ; BE : 8 minutes ; CG : 9 minutes ; CD = 4 minutes ; CE : 10 minutes ; GD : 4 minutes ; DF : 11 minutes ; DE : 12 minutes ; FE : 9 minutes. Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens du parcours.

1) Ce graphe est – il connexe ? justifier. **0,5pt**

2) Montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Donner un exemple de trajet. **0,5pt**

3) Tous les matins, l'agent de sécurité part du bâtiment A et se rend au bâtiment G. En utilisant un algorithme que l'on explicitera, déterminer le chemin qu'il doit suivre pour que son temps de parcours soit le plus court possible, et donner ce temps de parcours. **1,5pt**

B/ Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(x ;y) associe le point M'(x' ;y') tel que $\begin{cases} x' = -x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} - y + 2\sqrt{3} \end{cases}$

1) Donner l'écriture complexe de f. **0,75pt**
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. **1pt**
3) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par f. **0,75pt**

Exercice 2: (4,5points)

g est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1) Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1;2[$ **0,75pt**
2) Déterminer par dichotomie une valeur approchée de α à 10^{-2}. **0,75pt**
3) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 1 - x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.
   a. Montrer que $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$ **0,5pt**
   b. Montrer que pour tout x dans $]1,+\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. **0,5pt**
   c. En déduire que pour tout x dans $]1,+\infty[$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ **0,5pt**
4) On pose pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ **0,5pt**
   b. En déduire que pour tout entier naturel n $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. **0,5pt**
   c. Montrer que la suite (u_n) converge vers α. **0,5pt**

Exercice 3: (5,5 points)

1) Soit $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i, z \in \mathbb{C}$.
a) Démontrer que $2 + i$ est une racine de p(z). **0,5 pt**
b) En déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$. **0,75 pt**
2) Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct (O,$\vec{u}, \vec{v}$) d'unité 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2 + i$, $-1 - 2i$ et $-4 + i$.
a) Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC **0,75 pt**
b) Calculer $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ et en déduire une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ **0,5 pt**
c) Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC. **0,25 pt**
3) soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.
a) montrer que l'application f associée à r est définie par : $f(z) = iz - 3 - i$. **0,5 pt**
b) Préciser les éléments géométriques caractéristiques de r. **0,5 pt**
4) Soit T : M(z) M' (z') telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$.
a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T est une homothétie de rapport 2. **0,5 pt**
b) Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de T pour le nombre complexe α vérifiant $|\alpha| = \sqrt{2}$ et $arg\alpha = -\frac{\pi}{4}$ **0,25 pt**
5) On considère la transformation g = roT. On suppose dans ce qui suit que $\alpha = 1 - i$.
a) Montrer que l'application h associée à g est définie par : $h(z) = 2iz - 2$ **0,5 pt**
b) Donner les éléments géométriques caractéristiques de g. **0,5 pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPETENCES (5POINTS)

Compétences attendues : *Déployer un raisonnement logique afin de résoudre un problème concret de vie.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. L'unité est le mètre. KAMI a un jardin triangulaire dont un sommet est repéré par son affixe $-i$ est les deux autres sommets sont solutions de l'équation $z^2 - (3 - 6i)z - 13 - 9i = 0$. Il souhaite le clôturer à l'aide d'un grillage dont le mètre coute 2500F.

Mme MEFIRE a un domaine dont les sommets A, B et C ont pour affixes respectives $-1 - 3i$; $4 - 3i$ et $-i$ et le sommet D est l'image du point A par similitude directe de centre B, de rapport $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. Mme MEFIRE voudrait construire sur ce terrain une école et pour cela elle aura besoin de recouvrir toute la superficie de ce terrain avec les carreaux. Le carton de carreaux coute 35 000F et peut recouvrir une superficie de $5m^2$.

Mme MEFIRE est propriétaire d'un véhicule qu'elle conduit depuis quelques années déjà. Durant les six dernières années, elle a minutieusement relevé la distance parcourue par son véhicule lorsque le réservoir est plein et a obtenu le tableau suivant :

Année	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Distance parcourue en km y_i	850	800	780	755	680	645

Avec le temps, le moteur de son véhicule s'est dégradé et Mme MEFIRE estime que si avec le réservoir plein elle ne peut parcourir 500 km alors il devra changer de moteur.

1) Déterminer clairement à partir de quelle année Mme MEFIRE devra changer de moteur **1,5pt**
2) Quelle somme doit prévoir Mme MEFIRE pour l'achat des carreaux pouvant couvrir entièrement son terrain ? **1,5pt**
3) Quelle somme d'argent doit prévoir KAMI pour entourer totalement son jardin ? **1,5pt**

Présentation générale 0,5pt