**LYCEE DE BANGOULAP**

*Évaluation de la Deuxième séquence*

| Classe : | TERMINALE C | Durée : | 04 heures | Année scolaire : | 2022/2023 |
|---|---|---|---|---|---|
| Épreuve : | MATHÉMATIQUES | Coef. : | 7 | Par | DJOUTSOP Emile |

## EVALUATION DES RESSOURCES (15,5 points)

### EXERCICE 01: (05 points)

*Les questions de cet exercice sont indépendantes*

1- La division euclidienne de 900 par un entier b a pour quotient 14 et pour reste r. Quelles sont les valeurs de b et r ? 0,5 pt

2- Soit n un entier naturel, montrer que 2n+5 et 3n+7 sont premiers entre eux. 0,5 pt

3- Déterminer tous les couples d'entiers naturels tels que $x^2 = y^2 + 17$. 0,75 pt

4- Déterminer les entiers naturels n tels que le nombre $\frac{3n-4}{2n-1}$ soit un entier. 0,5 pt

5- Déterminer tous les couples $(x;y)$ tels que le nombre $\overline{x43y}$ écris dans le système décimal soit divisible par 2 et par 9. 0,75 pt

6- Démontrer en utilisant les congruences que $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7. 0,5 pt

7- Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système $\begin{cases} PGCD(a;b) = 12 \\ a^2 - b^2 = 7344 \end{cases}$. 0,75 pt

8- Déterminer le chiffre des unités de $7^{1999}$. 0,75 pt

### EXERCICE 02 : (03,5 points)

Soit la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1- Montrer que l'ensemble de définition $D_f$ *de* $f$ est [-1 ; 0[U]0 ; 1]. 0,25 pt

2- Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son $D_f$. 0,5 pt

3- Etudier la dérivabilité de $f$ en -1 et en 1, puis donner une interprétation graphique des résultats obtenus. 0,25 pt

4- Démontrer pour tout $x \in D_f$ $f'(x) = \frac{-1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. 0,5 pt

5- Dresser le tableau de variation de $f$ *sur* $D_f$. 0,25 pt

6- Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique $\alpha \in ]0;1[$. 0,75 pt

7- Construire la courbe de $f$ sur son $D_f$. 0,5 pt

### EXERCICE 03 : (03,5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(2;0;1)$; $B(3;-2;0)$ *et* $C(2;8;-4)$.

1. Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. Exprimer en fonction de $x, y$ *et* $z$ les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$. 0,75 pt
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant : $\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$. 0,5 pt
3. Montrer qu'il existe un unique point N vérifiant : $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées du point N. 0,5 pt

4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est $V=\dfrac{Surface\ de\ base \times hauteur}{3}$.

a) Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre ABCN est égal à $\dfrac{1}{6}CN^2$ ; puis calculer V. 1 pt

b) En utilisant le résultat du 1) et en prenant M=C, calculer l'aire du triangle ABC.

c) En déduire la distance du point N au plan (ABC). 0,5 pt

## <u>EXERCICE 04</u> : (03 points)

L'espace vectoriel W des vecteurs est muni d'une base orthonormée directe $B=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$ ; $\overrightarrow{e_2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}-\vec{j}\right)$ *et* $\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_2}$

1- Soit $f$ une application du plan de W dans W qui à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ de W associe le vecteur $f\left(\vec{u}\right)=\left(\overrightarrow{e_1}\wedge\vec{u}\right)\wedge\overrightarrow{e_2}$.

a) Montrer que $f$ est un endomorphisme de W. 0,5 pt

b) Montrer que $f\left(\vec{u}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[(y-x)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(y-x)\vec{k}\right]$. 0,5 pt

2- Démontrer que $\ker f$ est un plan vectoriel de W dont-on donnera une base. 0,5 pt

3- Démontrer que $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle de W dont-on donnera une base.

4- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{e_3}$ et montrer que $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)$ est une base orthonormée directe de W. 0,5 pt

5- Ecrire la matrice de $f$ dans la base $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)$. 0,5 pt

## <u>PARTIE B</u> : <u>EVALUATION DES COMPETENCES</u>: (04,5 points)

Un jeune ingénieur veut créer un jardin sur un domaine $ABCD$ ou les sommets $A$, $B$ et $C$ ont pour affixes respectives $Z_A=3-i$ ; $Z_B=-1+i$ et $Z_C=1+5i$. Le point $D$ est l'image du point $A$ par la similitude directe de centre $C$ qui transforme $B$ en $A$. il souhaite recouvrir ce jardin avec des pavés dont le carton coûte 15 000F et peux recouvrir une superficie de $5\ m^2$.

Il dispose également une plantation sur laquelle il veut y planter des avocatiers et des manguiers. Au démarrage du projet, le jeune ingénieur dispose de 149 500 F et veux faire une pépinière pour ses arbres fruitiers. Un centre de recherche lui propose d'acheter le plan d'avocatier à 3 500 F et le plant de manguier à 5 000 F et dans ce cas il aura plus de 12 plants de chaque type.

Les récoltes annuelles de chaque sorte de fruit sont conditionnées dans les sacs et sont vendues au même prix. En un an, la production varie entre 40 et 160 sacs de fruits et le bénéfice réalisé par ce jeune ingénieur exprimé en milliers de francs est modélisé par la fonction $g(x)=\dfrac{-2x^2+2000x-6400}{x}$ où $x$ représente le nombre de sacs de fruits par an.

**Tâches**

1- Déterminer le montant minimum nécessaire pour l'achat des pavés 1,5pt

2- Déterminer le nombre exact de plants d'avocatiers et de manguiers si l'ingénieur décide de traiter avec le centre de recherche. 1,5 pt

3- Déterminer le nombre de sacs de fruits à produire en un an pour réaliser un bénéfice maximal. 1,5 pt