MINESEC_LYCEE DE GUIDER
Département de Mathématiques
ANNEE SCOLAIRE: 2022-2023

TRIM 1/ Eval continue N°2
CLASSE: Tle C
Durée: 4h **Coefficient**: 7

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Consigne : ***L'épreuve*** *comporte deux parties sur 20 points. Rédaction exigée. Qu'on se le dise !!*

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES / 15,5 points

EXERCICE 1 / 2,5 points

1. Montrer que tout nombre premier $p > 3$ s'écrit de la forme $p = 6k + 1$ ou $p = 6k + 5$. **0,75pt**
2. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $13x + 47y = 1$.
   a) Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution $(x_0;\ y_0)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ à déterminer. **0,75pt**
   b) Soit $(x; y)$ ue solution de l'équation (E).
      i) Démontrer que $8y \equiv 1[13]$, puis résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $8y \equiv 1[13]$. **0,75pt**
      ii) En déduire l'ensemble solution de l'équation (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. **0,25pt**

EXERCICE 2 / 2 points

Soit l'équation (E) : $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$.

1. Démontrer que l'équation (E) est équivalente au système : $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$. **0,5pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^2 - 5u + 4 = 0$. **0,5pt**
3. En déduire les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. **1pt**

EXERCICE 3 / 5 points

E désigne un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}) = 3(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$ et $f(\vec{\imath}) = f(\vec{\jmath}) = f(\vec{k})$.

1. Démontrer que la matrice de f dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **0,25pt**
2. Déterminer le noyau et l'image de f. On déterminera une base de chacun des espaces vectoriels. **1pt**
3. Démontrer que $f \circ f = 3f$ et en déduire que Imf est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $f(\vec{u}) = 3\vec{u}$. **0,75pt**
4. On pose $\vec{e_1} = \overrightarrow{-\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{-\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{e_3} = \overrightarrow{-\imath} + \vec{k}$.
   Montrer que $(\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$ est une base de E puis ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$. **1pt**
5. Soit α un réel et φ l'endomorphisme de E tel que pour tout $\vec{u} \in E$, $\varphi(\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) - \vec{u}$.
   a) Démontrer que pour tout $\vec{u} \in E$, $\varphi \circ \varphi(\vec{u}) = \vec{u}$ si et seulement si $\alpha = \frac{2}{3}$. **0,5pt**
   b) On suppose dans la suite que $\alpha = \frac{2}{3}$.
      i) Montrer que φ est un automorphisme et en déduire $Im\varphi$. **0,5pt**
      ii) Ecrire la matrice de φ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$. **0,5pt**
      iii) Montrer que Imf est l'ensemble des vecteurs invariants par φ. **0,5pt**

EXERCICE 4 / 6 points

I- On considère la fonction h par : $h(x) = \frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x}$. Peut-on prolonger h par continuité en $\frac{\pi}{3}$? **0,75pt**

II- Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 1⁺ puis interpréter le résultat obtenu. **0,5pt**
2. Justifier que f est dérivable sur $]1;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f. **1pt**

3. Montrer que f réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer. **0,5pt**
4. Montrer que $\forall\ x \in J,\ f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{2x}$. **0,5pt**
5. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
   a) Etudier les branches infinies de (C) en $+\infty$. **0,5pt**
   b) Tracer (C). **0,5pt**
6. Soit g, la fonction définie sur $[0;\ \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = f(\frac{1}{\cos x})$.
   a) Montrer que pour tout $x\ \in [0;\ \frac{\pi}{2}[, g(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$. **0,25pt**
   b) Montrer que g réalise une bijection de $[0;\ \frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle K que l'on précisera. **0,75pt**
   c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et que $\forall\ x \in K,\ \ (g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$. **0,75pt**

***PARTIE B** : EVALUATION DES COMPETENCES / 04,5 points*

Une voiture placée en un carrefour pris comme un point M se déplace sur une route. PAUL, élève en classe de Terminale scientifique décide d'étudier le mouvement de cette voiture sur un intervalle de 0 à 4h de temps. L'abscisse de la voiture à un instant t quelconque est donnée par $f(t) = -t^3 + t^2 + 8t + 1$, sa vitesse par : $v(t) = f'(t)$ et son accélération : $a(t) = f''(t)$.

PAUL se rappelle que sur un intervalle de temps, le mouvement est accéléré si $v(t) \times a(t) \geq 0$ et retardé si $v(t) \times a(t) \leq 0$.

PIERRE, le camarade de PAUL s'est inscrit à un jeu concours de mathématique afin de décrocher une bourse d'étude avec son examen. Le concours consiste à imaginer un polynôme P de degré supérieur à 3 à coefficient complexes devant automatiquement vérifier la propriété (E) suivante : **« pour tout polynôme P et pour tout nombre complexe z_0, si z_0 est une racine de P alors $\overline{z_0}$, $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\overline{z_0}}$ sont aussi des racines de P ».** PIERRE choisit le polynôme P définit par : $P(z) = -6z^4 + 18z^3 - 27z^2 + 18z - 6.$

Tache 1 : Démontrer que l'abscisse du point M est nulle à un instant $t_0 \in [0; 4]$.(vous préciserez exactement l'intervalle de deux temps consécutifs où t_0 est à 10^{-2} près).

Tache 2 : Déterminer l'abscisse et l'accélération de la voiture à l'instant où sa vitesse est maximale, puis donner les intervalles de temps sur lesquels le mouvement de la voiture est accéléré où retardé.

Tache 3 : PIERRE décrochera t-il la bourse d'étude ? Justifier ?

Examinateur : M. NGANSOB NONO Yves. B (PLEG_Maths)