EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES [15,5 points]

EXERCICE 1 : [3,25 points] (*UNIQUEMENT D*)

1. Montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ 0.5pt
2. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, Détermine $\cos 2x$. 0.5pt
3. En déduire la valeur de x . 0.25pt
4. Démontre que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x)\sin(2x) = 1 - \cos(2x)$ 0.5pt
5. En déduis la valeur de $\tan \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$. 0.5pt
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $4\sin(x)\sin(\frac{\pi}{3} - x)\sin(\frac{\pi}{3} + x) = \sin 3x$ 0.5pt
7. En déduire la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{9}\sin \frac{2\pi}{9}\sin \frac{4\pi}{9}$. 0.5pt

EXERCICE 1 : [3,25 points] (*UNIQUEMENT C*)

$\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(-1; 2; 3)$ et de rayon 3. $A(2; 1; 0)$ est un point et $\vec{u}(3; -4; 1)$ un vecteur de l'espace. $\mathcal{D}$ est la droite de repère $(A; \vec{u})$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - 3y + 1 = 0$.

1. Détermine une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ 0.5pt
2. Détermine une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ 0.5pt
3. Détermine la position de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$ puis détermine, les coordonnées des points d'intersection, s'il y en a. 1pt
4. Détermine la position de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ puis détermine la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$. 1.25pt

EXERCICE 2 : [3,5 points]

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} \end{cases}$$

et $V_n = U_n - 1$

1. Calcule U_1 et U_2 0.5pt
2. Calcule V_1 et V_2 0.5pt
3. Montre que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. 1pt
4. Exprime V_n puis U_n en fonction de n . 1pt
5. Calcule $S_5 = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$ 0.5pt

EXERCICE 3 : [2,75 points]

Une classe de Première Scientifique compte 7 filles et 10 garçons. L'on organise une Olympiade de Mathématiques entre ces élèves. Le tableau d'honneur de cette olympiade est constitué des élèves ayant par ordre, les trois premières notes. Sachant qu'il n'y a pas d'ex aequo :

1. Combien de tableaux d'honneur différents peut-on avoir ? 1pt
2. Combien de tableaux d'honneur ayant uniquement des filles peut-on avoir ? 0.75pt

3.1. Combien de tableaux d'honneur ayant au moins deux garçons peut-on avoir ?

1pt

EXERCICE 3 : [6 points]

I-Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{1 - x}$. Où a , b et c sont des nombre réels .

Déterminer les réels a , b et c pour que la courbe de la fonction g passe par les points $A(0; 6)$ et $B(2; -4)$ et admet au point d'abscisse 3 une tangente parallèle à l'axe des abscisses. 1pt

II-Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{1 - x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1.a) Détermine le domaine de définition de f . 0.5pt

.b) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. 1pt

c) Déduis-en les différentes asymptotes 0.5pt

2-a) Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{1 - x}$. 0.5pt

b) En déduire une équation de son asymptote oblique. 0.25pt

3) Déterminer la fonction f' de f puis dresser le tableau de variations de f . 0.75pt

4) Détermine l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2 0.5pt

5) Construire la courbe de $\mathcal{C}_f$ ainsi que ses asymptotes et la tangente (T) . 1pt

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES [4,5 points]

Etre capable de déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématique en faisant appel aux fonctions et aux équations pour déterminer un budget ou faire une prévision.

Pour commencer son élevage de Lapin et Canard, Henri a placé dans une banque de la place une somme de 4 000 000 frs à un taux d'intérêt (composé) trimestriel de $x\%$. A la fin du deuxième trimestre, il consulte son compte et relève un montant de 4 161 600 frs. Ne connaissant pas le taux d'intérêt de cette banque, il espère que les intérêts générés à la fin du troisième trimestre lui permettront de retirer au moins 4 200 500 frs.

Par ailleurs, il a acheté un terrain de forme rectangulaire dont le périmètre est $34m$ et la diagonale mesure $13m$. Il compte y cultiver des ananas. Un mètre carré d'ananas coûte 3025 frs. Après la récolte des ananas, Henri a 30 jours pour écouler ses fruits, mais le prix de l'ananas sur le marché est en baisse. Cependant, il espère réaliser un grand bénéfice afin de rembourser un crédit de 24800 frs pris à la banque le jour où il réalisera un bénéfice maximal. Son bénéfice journalier est modélisé par la fonction bénéfice dont l'expression est : $\mathcal{B}(t) = -2t^2 + 48t + 24500$.

Tâches :

1. Henri pourra-t-il retirer le montant espéré à la fin du troisième trimestre ? 1.5pt

2. Combien doit prévoir Henri pour la culture d'ananas ? 1.5pt

3. Henri pourra-t-il rembourser sa dette ? 1.5pt