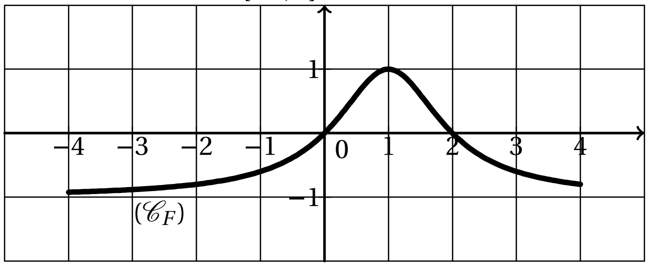
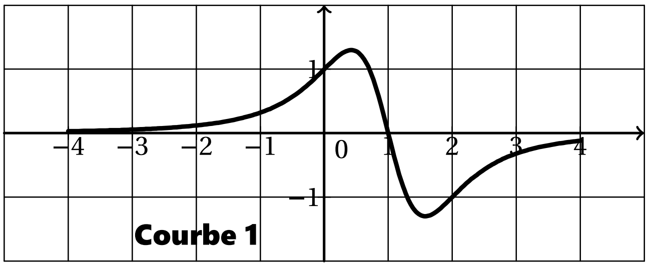
L'épreuve est étalée sur deux pages.

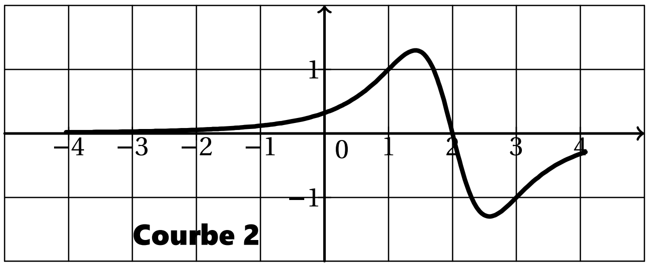
PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

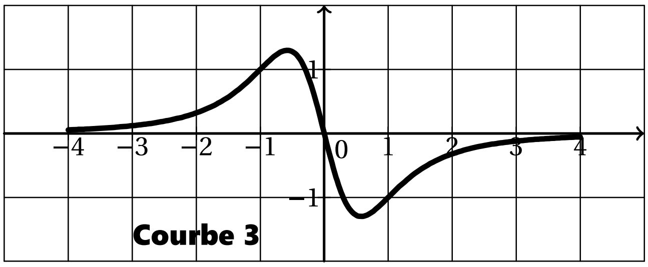
Exercice 1 **2,5 points**

1) Ci-dessous, $(\mathscr{C}_F)$ est la courbe représentative d'une primitive F sur $[-4;4]$ d'une fonction numérique f d'une variable réelle continue sur $[-4;4]$. Les courbes 1, 2 et 3 sont celles des fonctions numériques à une variable réelle sur $[-4;4]$.









a) Une des trois courbes 1, 2 et 3 ci-dessus est la courbe représentative de f.
Déterminer laquelle en justifiant la réponse. 0,5 pt

b) Ecrire une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_F)$ au point d'abscisse 2. 0,5 pt

2) Déterminer les primitives de la fonction h sur I dans chacun des cas suivants :

a) $h(x) = (1+\tan^2 x)\tan^5 x$ et I $= \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. 0,5 pt

b) $h(x) = \dfrac{x^3+(x^2+2x+1)}{x^3(x+1)^2}$ et I $= [1;+\infty[$. 0,5 pt

c) $h(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$ et I $= \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. 0,5 pt

Exercice 2 **7 points**

On considère la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-8}{x-1}}$, et $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de h dans un repère orthonormé du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm sur les axes.

1) Prouver que le domaine de définition de h est l'ensemble $]-\infty;1[\cup[2;+\infty[$. 0,5 pt

2) Etudier la dérivabilité de h en 2. 0,5 pt

3) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$. 0,5 pt

b) Montrer que pour $x<0$, $h(x)+x = \dfrac{x^2-8}{-x(x-1)} \times \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^3-8}{x^2(x-1)}}+1}$. 0,5 pt

4) Montrer que $(\mathscr{C})$, la courbe de h, admet trois asymptotes dont on précisera les équations.

5) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8$.

a) Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$. 0,5 pt

b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α telle que $-1{,}3 < \alpha < -1{,}2$. 0,75 pt

6) a) Montrer que pour x dans $]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2(x-1)^2 f(x)}$. 0,5 pt

b) Dresser le tableau de variations de h. 0,75 pt

7) a) Montrer que pour tout $x \in [-1;0]$, $\dfrac{1}{8} \leq h'(x) \leq 2$. 0,5 pt

b) En déduire que pour tout x de $[-1;0]$, $2(x+\sqrt{2}) \leq h(x) \leq \dfrac{1}{8}(x+16\sqrt{2})$. 0,5 pt

8) Soit k la restriction de h sur $]2;+\infty[$.

a) Justifier que k admet une bijection réciproque qu'on notera k^{-1}. 0,5 pt

b) Construire $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ courbe de k^{-1}. (On admettra que $h(\alpha) \approx 2{,}1$) 1 pt

Exercice 3 — 5 points

On considère la fonction ℓ définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ par $\ell(x) = \sqrt[3]{2\cos x - 1}$.

1) Montrer que pour tout réel t, on a : $2\cos t - 1 = -4\sin\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left[\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$. 0,75 pt

2) a) Montrer que pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{3}\right[$, $\dfrac{\ell(x)}{x-\frac{\pi}{3}} = -\sqrt[3]{\dfrac{4\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})}{(x-\frac{\pi}{3})^2}} \times \sqrt[3]{\dfrac{\sin[\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})]}{x-\frac{\pi}{3}}}$. 0,75 pt

b) Etudier la dérivabilité de ℓ en $\dfrac{\pi}{3}$. 0,5 pt

3) Montrer que pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{3}\right[$, on a : $\ell'(x) = -\dfrac{2\sin(x)}{3[\ell(x)]^2} = -\dfrac{\sqrt{3-[\ell(x)]^6 - 2[\ell(x)]^3}}{3[\ell(x)]^2}$. 0,75 pt

4) Montrer que ℓ admet une bijection réciproque qu'on notera μ. 0,5 pt

5) a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité J de μ. 0,5 pt

b) Vérifier que $\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \in$ J, puis déterminer $\mu'(\sqrt[3]{\sqrt{3}-1})$. 0,75 pt

c) Expliciter $\mu'(x)$ pour $x \in$ J. 0,5 pt

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)

Situation :

Mme Gabel dispose d'un terrain de forme rectangulaire sur lequel elle voudrait implanter les locaux d'une entreprise faisant dans la fabrication et la commercialisation du beurre de cacao. Le géomètre indique à **Mme Gabel** que le terrain a pour aire 2500 m^2, et pour dimensions en mètres : $(300x-100)$ et $(25\sqrt{x})$ avec $x \in [0;1]$, $x \in [a;b]$ où $b-a = 10^{-2}$. Pour des raisons de sécurité, **Mme Gabel** doit clôturer le terrain avec 4 passages de fil de fer barbelé dont le mètre coûte 350 fcfa, et prévoit pour cela, une somme 330000 fcfa.

Le beurre produit sera vendu dans deux formes de boites en plastique dur d'épaisseur négligeable, hermétiquement fermées, l'une des formes étant celle d'un parallélépipède rectangle de volume 200 cm^3 et l'autre forme est celle d'un cylindre de volume 300 cm^3, et dont le rayon et la hauteur ont la même valeur.

Le concepteur des boites précise que les dimensions d'une boite dont la forme est celle d'un parallélépipède sont $(40y-60)$ cm ; $5y$ cm et $2y$ cm avec $y \in [1;2]$, $y \in [c;d]$ où $d-c = 10^{-1}$. Pour la confection d'une boîte, un cm^2 de plastique utilisé est facturé à $0{,}5$ fcfa et la main d'œuvre à 15 fcfa. **Mme Gabel** prévoit 185 fcfa pour la production d'une boîte ayant la forme d'un parallélépipède.

Mme Gabel a un t-shirt sur lequel sont mentionnées :

(Aire totale d'un parallélépipède rectangle de dimensions a, b et c) $= 2ab+2ac+2bc$.

(Aire totale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h) $= 2\pi(r^2+rh)$.

Tâches :

1) Le montant dont dispose **Mme Gabel** pour l'achat du fil barbelé est-t-il suffisant ? 1,5 pt

2) Le montant prévu par **Mme Gabel** pour la production d'une boîte de forme parallélépipédique est-il suffisant ? 1,5 pt

3) Quel est le montant pour la production d'une boîte de forme cylindrique ? 1,5 pt

Présentation : 0,5 pt