Ministère des Enseignements Secondaires
LYCÉE BILINGUE DE DOMBÈ

Département de Mathématiques

Année Scolaire 2020/2021
Trimestre : 1
Evaluation nº 2
Épreuve : Mathématiques
Classe : Tle C
Durée : 4 heures. **Coef : 7**

L'épreuve est étalée sur deux pages.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

Exercice 1 — 4,5 points

I) Montrer par récurrence que :

1) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx - x) = \frac{\cos(nx)\sin(nx)}{\sin x}$ où $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. 1 pt

2) $\forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$. 0,5 pt

II) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A$(2;0;2)$, B$(2;1;2)$, C$(1;2;1)$ et E$(-1;-1;0)$,

1) a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan. 0,5 pt

b) Montrer que les points A, B, C et E ne sont pas coplanaires. 0,5 pt

2) Calculer l'aire du triangle ABC, et le volume du tétraèdre EABC. 1 pt

3) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par E et perpendiculaire au plan (ABC). 0,5 pt

b) En déduire les coordonnées du point F, projeté orthogonal de E sur (ABC). 0,5 pt

Exercice 2 — 5,5 points

Le plan est doté d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, et $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = 3\sqrt{1 - x|x|}$.

1) Soit x un réel.

a) Montrer que si $x \leq 0$, on a : $1 - x|x| \geq 0$. 0,25 pt

b) On suppose $x \geq 0$. Montrer que $1 - x|x| \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0;1]$. 0,25 pt

c) En déduire que le domaine de définition de f est l'intervalle $]-\infty;1]$. 0,25 pt

2) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. 0,5 pt

b) Etudier la dérivabilité de f en 1, et donner une interprétation géométrique. 0,5 pt

3) a) Montrer que $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$. 0,5 pt

b) Dresser le tableau de variations de f. 0,5 pt

4) Etudier les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$. 0,75 pt

5) a) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1}, de domaine de définition **K** à préciser. 0,5 pt

b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1}. 0,25 pt

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in$ **K**. (On distinguera le cas $x \leq 3$, et le cas $x \geq 3$). 0,5 pt

6) Construire $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_1)$ la courbe de f^{-1}. 0,75 pt

Exercice 3 — 5 points

I) On pose $Z = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$.

1) Donner l'écriture algébrique de Z^2, puis celle de Z^4, et en déduire un module et un argument de Z^4. 1 pt

2) a) Déterminer alors le module et l'argument principal de Z. 0,5 pt

b) Prouver que $\cos\dfrac{\pi}{16} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$. 0,5 pt

II) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (1-6i)z^2 - (17+8i)z - 33 + 30i = 0$.

1) Vérifier que -3 est une solution de (E), puis résoudre l'équation (E). 1,25 pt

2) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -3$, $z_{\mathrm{B}} = -1+4i$ et $z_{\mathrm{C}} = 2+3i$.

a) Montrer que ABC est un triangle isocèle. 0,5 pt

b) Déterminer z_{G} l'affixe de G, barycentre des points pondérés (A ; -1), (B ; 1) et (C ; 1). 0,25 pt

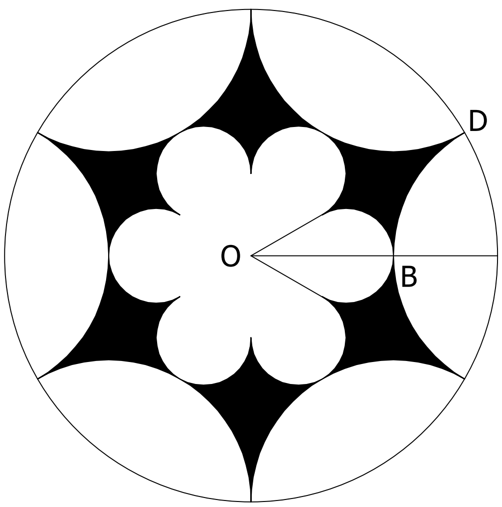
c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixes z tels que $|z+1-4i|^2 - |z+3|^2 + |\bar{z}-2+3i|^2 = -28$. 1 pt

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)

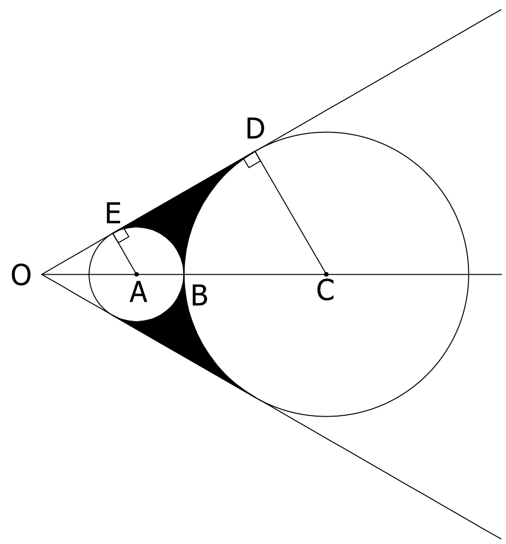
Situation :

Dans le cadre de la promotion du tourisme, l'Exécutif Communal d'une localité entreprend la construction d'un musée d'architecture moderne sur un terrain rectangulaire dont le mètre carré est évalué à $15\ 000$ fcfa, et les dimensions en dizaines de mètres sont les modules des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - (6+i)z + 10 = 0$.
L'architecte en charge du projet prévoit la construction en verre et acier blindés d'un bâtiment ayant la forme d'une pyramide à base triangulaire pour abriter les objets d'art précieux. Il indique que sur chaque face latérale du bâtiment en question, il sera matérialisé une rosace particulière inscrite dans un cercle à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles de centres A et C, et tangents extérieurement en B, milieu de [OC] dans un repère orthonormé direct du plan d'origine O où l'unité est le mètre, les points A, C, D et E ont pour affixes respectives 2, 6, $3\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
Le matériel pour la réalisation d'une rosace coûte au mètre carré $20\ 000$ fcfa.

Rosace inscrite dans un cercle



Motif



La masse de verre nécessaire pour la construction du bâtiment exprimée en tonnes est égale à
$\dfrac{\pi(\sqrt{3}-1)}{4}\left[F\left(\dfrac{\pi(\sqrt{3}-1)}{2}\right) - F(0)\right]$ avec F primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \longmapsto \cos[(\sqrt{3}+1)x] + \sin[(\sqrt{3}+1)x]$.
Un bienfaiteur fait un don de 525 kilogrammes de verre à l'Executif Communal pour la réalisation du projet.

Tâches :

1) Quel montant doit prévoir l'Exécutif Communal pour l'achat du terrain ? 1,5 pt

2) Quel montant doit prévoir l'Exécutif Communal pour l'achat du matériel nécessaire à la réalisation des rosaces ? 1,5 pt

3) La masse de verre offerte par le bienfaiteur sera t-elle suffisante pour la construction du bâtiment ? 1,5 pt

Présentation 0,5 pt