L'épreuve est étalée sur deux pages.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

Exercice 1 — 5,5 points

On veut déterminer l'ensemble **T(P)** des triplets (x, y, z) de $(\mathbb{N}^*)^3$ vérifiant l'équation (E) : $x^2 + y^2 = z^2$.

N.B : Un élément de T(P) est appelé triplet pythagoricien.

1) Montrer que $\forall\ (k, a, b) \in (\mathbb{N}^*)^3$ avec $a > b$, les triplets $(ka^2 - kb^2, 2kab, ka^2 + kb^2)$ et $(2kab, ka^2 - kb^2, ka^2 + kb^2)$ sont des éléments de **T(P)**. 0,25 pt

Dans toute la suite, (x, y, z) désigne un élément de **T(P)**, et on pose $\delta = \text{pgcd}(x, y)$, et (u, v) est le couple d'entiers naturels tels que $x = \delta u$ et $y = \delta v$.

2) a) Montrer que $\text{pgcd}(x, z) = \text{pgcd}(y, z) = \delta$. 0,5 pt
   b) Justifier que $\text{pgcd}(u, v) = \text{pgcd}(u, w) = \text{pgcd}(v, w) = 1$ où w est l'entier vérifiant $z = \delta w$. 0,5 pt
   c) Justifier que u et v ne sont pas tous pairs. 0,5 pt
   d) Montrer que (u, v, w) est un élément de **T(P)**. 0,25 pt
3) a) Montrer que l'équation $n^2 \equiv 2[4]$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}$. 0,5 pt
   b) Montrer que si u et v sont tous impairs, alors $u^2 + v^2 \equiv 2[4]$. 0,25 pt
   c) En déduire que u et v ne sont pas tous impairs
4) On suppose u impair, et v pair.

On admet que si (k, k') est un couple d'entiers naturels tous non nuls, premiers entre eux tels que kk' soit un carré parfait, alors k et k' sont des carrés parfaits.

   a) Montrer que w est impair, et que $w + x$ et $w - x$ sont pairs. 0,5 pt
   b) En déduire qu'il existe un couple (p, q) d'entiers naturels tous non nuls et premier entre eux tels que $u = p - q$; $w = p + q$ et $v^2 = 4pq$. 0,5 pt
   c) Justifier que pq est un carré parfait. 0,25 pt
   d) En déduire l'existence d'un couple (a, b) d'entiers naturels tous non nuls avec $a > b$ tel que : $u = a^2 - b^2$; $v = 2ab$ et $w = a^2 + b^2$. 0,5 pt
5) a) Déterminer l'ensemble **T(P)**. 0,5 pt
   b) Déterminer tous les triplets (x, y, z) de **T(P)** pour lesquels $z \le 18$. 0,5 pt

Exercice 2 — 3,75 points

AIBJ est un rectangle tel que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AJ}}) = \frac{\pi}{3}$ et $AI = 4$. On nomme par H le projeté orthogonal de J sur la droite (AB).

1) a) Faire une figure, puis montrer que $AJ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 0,5 pt
   b) On pose $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AI}$ et $\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overrightarrow{AJ}$. Montrer que $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan. 0,25 pt

Dans toute la suite, on suppose le plan muni du repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

2) a) Déterminer z_I, z_J et z_B les affixes respectives des points I, J et B. 0,75 pt
   b) Etablir que l'affixe z_H du point H vérifie : $z_H = \frac{1}{3}(3 + i\sqrt{3})$. 0,25 pt
3) Soit s la similitude directe qui transforme B en J et J en A.
   a) Donner l'écriture complexe de s, puis, déterminer le rapport et l'angle de s. 0,75 pt
   b) Vérifier que H est le centre de s. 0,25 pt
4) a) Déterminer la nature exacte de $s \circ s$, ainsi que ses éléments caractéristiques. 0,5 pt
   (Indication : On pourra d'abord donner l'écriture complexe de $s \circ s$)
   b) Sans faire des calculs, montrer que $\overrightarrow{HA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$. 0,25 pt
5) φ est la similitude directe de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\sqrt{3}$.
   Montrer que $s \circ \varphi$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{BJ}$. 0,25 pt

Exercice 3 **5,75 points**

Sur $]0;+\infty[$, on définit les fonctions f et g par : $f(x) = \ln x - x\ln x + x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité sur les axes est 2 cm.

$(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. 0,75 pt

2) a) Etudier les variations de g. 0,5 pt
 b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α et que $1,7 < \alpha < 1,8$. 0,5 pt
 c) Etudier le signe de $g(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$. 0,5 pt

3) a) Vérifier que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f. 0,75 pt
 b) Montrer que $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_1 et x_2 telles que : $0,4 < x_1 < 0,5$ et $3,8 < x_2 < 3,9$. 0,5 pt

4) a) Etudier les branches infinies de $(\mathscr{C})$. 0,5 pt
 b) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha} - 1$. 0,25 pt

5) a) Placer les points de $(\mathscr{C})$ d'abscisses x_1, x_2 et α dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $f(\alpha) \approx 1,33$) 0,25 pt
 b) Tracer $(\mathscr{C})$. 0,5 pt

6) $(\mathscr{D})$ est le domaine plan délimité par $(\mathscr{C})$, les droites d'équations $x = 1$, $x = 3$ et $y = 0$.
 a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^3 (1-x)\ln x \, dx$. 0,5 pt
 b) En déduire l'aire exacte du domaine plan $(\mathscr{D})$. 0,25 pt

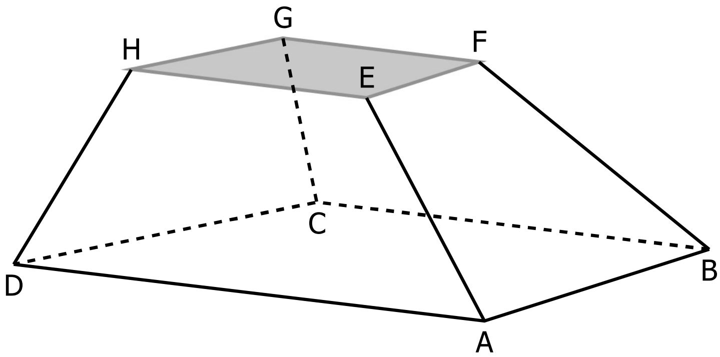
PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)

Pallier de compétences :

Résoudre une situation problème, déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide d'un langage mathématique en faisant appel aux nombres complexes, aux équations diophantiennes et le produit vectoriel.

Situation :

La société **Green Planet** fait dans la culture du maïs bio et sa transformation en farine. Pour diversifier ses activités, elle envisage se lancer dans l'élevage des poissons tilapia, et ceci par la création d'un étang. L'étang en question a la forme d'un triangle PQR, où P$(1+2i)$; Q$(2+i)$ et R$(4+3i)$ dans un repère orthonormé direct où l'unité sur les axes est 1 hm (1 hectomètre). Dans cet étang, on introduira 4 alevins de tilapia au mètre carré.



La société **Green Planet** ayant connu des difficultés pour le stockage de ses récoltes, opte se construire un entrepôt pouvant contenir au moins 250 m^3 de farine de maïs. L'ingénieur **Bita** approché pour la réalisation de l'entrepôt propose une structure en forme de tronc de pyramide ABCDEFGH(Voir figure ci-dessus) où A$(0;3;0)$, B$(-4;4;0)$, C$(-4;-1;0)$, D$(0;-3;0)$, E$(0;\frac{3}{2};\frac{5}{2})$, F$(-2;2;\frac{5}{2})$, G$(-2;-\frac{1}{2};\frac{5}{2})$ et H$(0;-\frac{3}{2};\frac{5}{2})$ dans un repère orthonormé direct de l'espace où l'unité sur chaque axe est $1,5$ m.

Green Planet a des employés très ardus au travail. Pour les motiver, une prime de $7\ 500$ fcfa devra être allouée à chaque employé femme, et une prime de 7000 fcfa pour chaque employé homme.

Le comptable de la société aimerait déterminer le budget mensuel pour la paie de ces primes. Il se rend chez le Directeur des ressources humaines qui déclare que la taille moyenne des employés est 167 cm, la taille moyenne des employés femmes est 160 cm, la taille moyenne des employés hommes est $173,5$ cm et l'effectif des employés de cette entreprise est compris entre 50 et 60.

Tâches :

1) Combien d'alevins devra-t-on introduire dans l'étang ? 1,5 pt
2) La structure de l'entrepôt proposé par **Bita** peut-elle contenir au moins 250 m^3 de farine de maïs ? 1,5 pt
3) Quel montant mensuel doit prévoir le Comptable de **Green Planet** pour les primes des employés ? 1,5 pt

Présentation 0,5 pt