EPREUVE DE MATHÉMATIQUE

NB : la clarté et la rédaction seront prises en compte

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 Points)

Exercice 1 : (5 POINTS)

- 1) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Démontrer que 1pt
 $PGCD(4a + 3b; 5a + 4b) = PGCD(a; b)$
- 2) P est un nombre premier.
 - a) Montrer que pour tout k tel que $1 \leq k \leq P - 1$; C_P^k est divisible par P . 0.75pt
 - b) Soit x, y deux entiers naturels non nuls. Montrer que $(x + y)^P \equiv x^P + y^P [P]$. 0.75pt
 - c) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* P$ divise $n^P - n$. 0.75pt
 - d) En déduire que pour tout entier naturel n premier avec P , P divise $n^{P-1} - 1$ 0.5pt
- 3) Montrer que $xy(x^5 - y^5)$ est divisible par 5 0.5pt
- 4) Prouver que pour tout $k \in \{2; 3; 4; 5\}$, $5! + k$ n'est pas un nombre premier 0.75pt

Exercice 2 (4 POINTS)

On considère l'équation complexe (E): $z^3 - (5 + 7i)z^2 - (4 - 25i)z - 12i + 30 = 0$.

- 1) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z que l'on déterminera. 0.5pt
 - b) Déterminer les complexes a et b tels que pour tout complexe z , on ait :
 $z^3 - (5 + 7i)z^2 - (4 - 25i)z - 12i + 30 = (z - z_0)(z^2 + az + b)$. 0.75pt
 - c) Résoudre l'équation (E). 0.5pt
- 2) Le plan est rapporté au repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $3; 2i$ et $2 + 5i$. Soit s la similitude directe de centre A qui transforme B en C.
 - a) Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = (1 - i)z + 3i$; puis déterminer l'angle de s . 0.75pt
 - b) Soit D l'image de C par s . Déterminer l'affixe de D. 0.5pt
 - c) Quelle est la nature du triangle ACD ? Justifier votre réponse. 0.5pt
- 3) Soit f l'application, qui à tout nombre complexe z différent de $2i$, associe $f(z) =$
 - a) On pose $z = x + iy$ et $f(z) = X + iY$. Exprimer en fonction de X et Y en fonction de x et y . 1pt
 - b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel. 0.5pt
 - c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$. 0.5pt

Exercice 3 (6 POINTS)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On pose $Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = 1 + i$

- 1) Déterminer la forme exponentielle de z_1 ; z_2 et $z = z_1 \times z_2$ 1.5pt
- 2) Déterminer la forme algébrique de z . 0.5pt
- 3) En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{\pi}{12})$. 0.5pt
- 4) Soit n un entier relatif. Démontrer que l'ensemble des relatifs n tels que $(1 + i)^n$ soit un réel est $4\mathbb{Z}$ 0.5pt

5) Déterminer et construire l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée

a) $|\bar{z} + z - 1| = 4$

1pt

b) $\arg(z + 1) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

1pt

c) $\frac{z+i}{z-1}$ est un imaginaire pur non nul

1pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5 Points)

Situation

Dans le but de protéger la confidentialité des échanges des militaires sur un front de guerre, les responsables militaires ont contacté une agence de sécurité pour mettre sur pied un procédé de codage des informations échangées par les militaires. Le manifeste de confidentialité que l'ingénieur de l'agence a mis sur pieds stipule qu'à chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25. Le procédé de codage est le suivant.

Etape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre k correspondant dans le tableau.

Etape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $6k + 5$ par 26 et on le note r .

Etape 3 : Au nombre r , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Mais le général NCHARE lui aussi informaticien de formation propose plutôt qu'à l'étape 2, r soit le reste de la division euclidienne de $(\overline{110}^2)^k$ par 26.

Tâches :

1) Coder Le mot : **COLLEGE** selon le procédé de l'ingénieur.

1.5pt

2) Décoder le sigle : **NSA** selon le procédé de l'ingénieur.

1.5pt

3) Décoder le sigle: **TIR** selon votre procédé proposé par général NCHARE

1.5pt

Présentation 0.5 pt