MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
OFFICE DU BACCALAUREAT DU CAMEROUN
Lycée de Fongo-Ndeng

Examen : Evaluation 1
Session : Novembre 2020
Série : Tle C
Epreuve : Mathématiques
Durée : 04 heures Coefficient : 7

L'épreuve comporte deux parties A et B. Pour la partie A, les exercices 1, 2 et 5 sont obligatoires alors les exercices 3 et 4 sont aux choix. Le candidat traitera un de ces deux exercices aux choix. L'utilisation de la calculatrice et du matériel usuel de géométrie est autorisée.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES [15.5 points]

EXERCICE 1 / 05 points

1. Démontrer par récurrence que :
   a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}(2p-1) = (-1)^{n+1}\, n.$ **[0,75pt]**
   b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$ **[1pt]**
   c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $5^{2n} - 3^n$ est divisible par 11. **[0,5pt]**
   d) Soit a et b deux entiers, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a :
   $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$ **[0,75pt]**
2. Ecrire l'entier $3^{10} - 1$ en base 9. **[0,25pt]**
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $x^3 - y^3 = 386$. **[0,5pt]**
4. On se propose de déterminer tous les éléments (a, b) de $\mathbb{N}^2$ qui vérifient la relation :
   $PPCM(a,b) - 9PGCD(a,b) = 13$.
   a. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x - 9y = 13$. **[0,25pt]**
   b. Déterminer tous les éléments (a, b) de $\mathbb{N}^2$ qui vérifient la relation :
   $PPCM(a,b) - 9PGCD(a,b) = 13$. **[1pt]**

EXERCICE 2 / 4 points

1. En utilisant les propriétés des congruences, montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11. **[0,5pt]**
2. Soit $a = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ un entier écrit sous sa symbolisation décimale.
   a) Montrer que $a \equiv \overline{a_1 a_0}[100]$. **[0,5pt]**
   b) En déduire le chiffre des unités et des dizaines de l'entier $n = 201^{2018^{2017}}$. **[1pt]**
3. Soit un entier naturel M s'écrivant $M = \overline{xyzzyx}$ dans le système décimal.
   a) Montrer que M est un multiple de 11. **[0,5pt]**
   b) Déterminer x et z tels que M soit divisible par 5 et par 7. **[0,75pt]**
   c) En déduire que M est un multiple de 35. **[0,25pt]**
   d) Déterminer y pour que M soit un multiple de 3. **[0,5pt]**

EXERCICE 3 / 2 points

1. a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de $n^2 - n + 1$ par 7. **[0,5pt]**
   b. En déduire le reste de la division euclidienne de $(2755674)^2 - 2755674 + 1$ par 7. **[0,25pt]**
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $x^2 + x - 6 \equiv 0[6]$. **[0,5pt]**
3. On pose $S_n = 2^n + 5^n + 7^n$ pour tout entier naturel n.
   a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de S_n par 9. **[0,5pt]**
   b) En déduire le reste de la division euclidienne par 9 de l'entier
   $B = (1793)^{2019} + (1796)^{2019} + (1798)^{2019}$. **[0,25pt]**

Exercice 4 / 2points

1. Trouver les paires d'entiers naturels dont le plus grand diviseur commun d et le plus petit multiple commun m vérifient : $\begin{cases} m+3d=276 \\ 10<d<30 \end{cases}$ **[1pt]**
2. On considère un nombre entier $a \geq 2$. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n ($n = dk$).
   a. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$ (On pourra remarquer que pour tout entier naturel k non nul et $\forall\, x \in \mathbb{N} : (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}) = x^k - 1$). **[0,25pt]**
   b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9. **[0,75pt]**

EXERCICE 5 / 4.5 points

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit le polynôme P de $\mathbb{C}$ défini par : $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i$.
   a) Montrer que le polynôme $P\,(z)$ admet une racine z_0 imaginaire pure. **[0,5pt]**
   b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que $P\,(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$. **[0,5pt]**
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P\,(z) = 0$. **[0,5pt]**
2. Soit les points $A(3+i), B(2i)$ et $C(2-2i)$.
   a) Placer les points A, B et C dans le plan. **[0,75pt]**
   b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle. **[0,5pt]**
   c) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[BC]$. **[0,25pt]**
   d) Montrer que les points A, B et C sont situés sur un même cercle dont-on précisera le centre et le rayon, puis construire. **[0,5pt]**
   e) Déterminer l'affixe du point J symétrique de A par rapport à I. **[0,25pt]**
   f) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme. **[0,25pt]**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES [4.5 points]

Tâche1 :

Un terrain a la forme d'un triangle dont les côtés ont pour mesures 132m ; 156m et 204m. On veut planter des arbres sur son pourtour de façon à ce qu'il ait un arbre à chaque sommet du triangle et les arbres soient également espacés.

Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres puisse être exprimée par un nombre entier de mètre ? **[1,5pt]**

Tâche2 :

Monsieur Dongmo dispose d'un terrain ayant la forme d'un quadrilatère dont les longueurs des cotés en mètre a, b, c et d formant dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison r strictement supérieur à 1. Il ne se souvient plus des dimensions, mais il se rappelle que a est strictement inférieur à 13 mètre et que r est premier avec a. Déterminer les dimensions de ce terrain sachant que $10a^2 = d - b$. **[1,5pt]**

Tâche3 :

Un phare émet trois feux différents : un rouge toutes les 18 secondes ; un vert toutes les 45 secondes et un blanc toutes les 2 minutes 30 secondes. Ces trois feux sont émis simultanément à minuit.

Trouver les instants d'émissions simultanés de feux : a) Rouge et vert b) Rouge et blanc c) Vert et blanc d) Rouge ; vert et blanc **[1,5pt]**

« *Quand vous vous demandez où est Dieu pendant les périodes difficiles de votre vie, souvenez-vous que le professeur reste toujours silencieux pendant l'examen* ». **(ALBERT Einstein)**