

Samedi, 28 Janvier 2023

EPREUVE DE MATHEMATIQUES N°1 DU 2^{ème} TRIMESTRE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (4,25 points)

- (a) Détermine les racines carrées du nombre complexe $\Delta = -3 + 4i$. **0,5pt**

(b) Déduis-en les solutions, dans \mathbb{C} , de l'équation $z^2 + (3 - 6i)z - 6 - 10i = 0$. **0,5pt**
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2 + 2i$, $z_B = i$ et $z_C = -1 + 4i$.

(a) Place les points A, B et C dans le repère. **0,5pt**

(b) Détermine la nature du triangle ABC . **0,5pt**

(c) Détermine l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. **0,5pt**
- Pour tout nombre complexe $z \neq i$, on pose : $Z = \frac{z+1-4i}{z-i}$.

(a) Détermine et construis l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|Z| = 1$. **0,5pt**

(b) Détermine et construis l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tel que Z soit imaginaire pur. **0,75pt**
- On pose, pour tout entier $n \geq 1$; $z_n = (z_A)^n$. Ecris z_n sous forme trigonométrique. **0,5pt**

EXERCICE 2 : (3,25 points)

Soit h la fonction définie sur $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right[$ par $h(x) = \sqrt{x + \frac{3}{4}}$.

- Résous l'équation $h(x) = x$. **0,5pt**
- Montre que pour tout $x \in I = \left[0; \frac{3}{2}\right]$, on a :
 - $h(I) \subset I$. **0,5pt**
 - $\frac{1}{3} \leq h'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, puis, que $\left| h(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left| x - \frac{3}{2} \right|$. **1pt**
- Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = h(U_n)$.
 - Montre que pour tout entier naturel non nul n , on a : $\left| U_n - \frac{3}{2} \right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n \times \frac{3}{2}$. **0,75pt**
 - Déduis-en que la suite (U_n) converge vers un réel l à déterminer. **0,5pt**

EXERCICE 3 : (3,25 points)

Un car loué par un Lycée pour sa colonie de vacance doit effectuer un trajet de $1500km$. Lorsque ce car roule à la vitesse moyenne x , exprimée en km/h , la dérivée de sa consommation $C(x)$, exprimée en litres pour $100km$, selon les études d'un expert sur ce type de véhicule, est donnée par la relation : $C'(x) = -\frac{300}{x^2} + \frac{1}{3}$. Une information complémentaire fournie par le chauffeur au moment de la location du car est qu'il consomme 25 litres aux $100km$ pour une vitesse moyenne

de $60\text{km}/h$. Le salaire horaire du chauffeur est de 900 FCFA et le litre de gasoil coûte 600 FCFA .

- Détermine la formule donnant la consommation en litres pour 100km . **0,75pt**
- Montre que le coût total du voyage est $P(x) = \frac{4050000}{x} + 3000x$. **1pt**
- Détermine la vitesse moyenne à laquelle le chauffeur doit rouler pour minimiser le coût total du voyage. Quel est alors le coût de l'organisation de cette colonie ? **1,5pt**

EXERCICE 4 : (4,25 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 + \ln x$. Soit \mathcal{C} sa courbe représentative.

- Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprète graphiquement le résultat. **1pt**
- (a) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variation de f . **0,75pt**
 (b) Montre que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. **0,5pt**
 (c) Dresse le tableau de variation de f^{-1} , fonction réciproque de f . **0,5pt**
- Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0,6 < \alpha < 0,7$. **0,75pt**
- Construis la courbe \mathcal{C} dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 1cm . **0,75pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

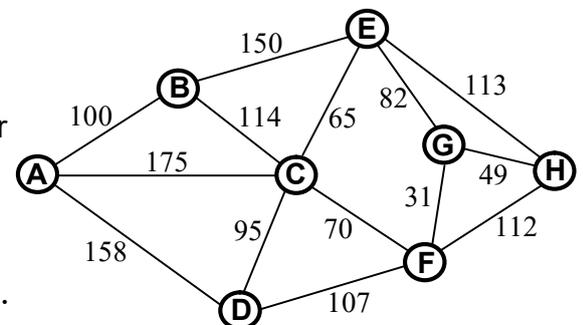
SITUATION :

Une société fabrique et commercialise les produits cosmétiques. Les relevés, en millions de FCFA des

Frais publicitaires	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires	60	66	69	75	81

frais publicitaires mensuels de la société et de son chiffre d'affaires mensuel sont consignés dans le tableau ci-dessus. Le directeur commercial veut investir davantage dans la publicité pour que le chiffre d'affaires mensuel atteigne 100 millions de FCFA.

Le directeur commercial de cette société rend visite à ses fournisseurs. Il se rend du site A au site H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possibles. Son assistant dresse un graphe qui schématise les trajets, en km , entre les six villes de la région, notées B, C, D, E, F, G et les deux sites A et H .



Un expert en finances et ami du directeur commercial, ayant obtenu les chiffres sur l'évolution financière de la société fait une modélisation des frais publicitaires par la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = 3x - x \ln(0,5x)$ (en millions de FCFA) où x désigne le nombre de mois d'existence de la société.

Tâches :

- Détermine, en utilisant la méthode des moindres carrés, le montant d'argent à investir dans la publicité afin d'atteindre le chiffre d'affaires mensuel de 100 millions de FCFA. **1,5pt**
- Détermine l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indique sa longueur. **1,5pt**
- A partir de quel mois la société va enregistrer une baisse des frais publicitaires ? **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt